

O TRATAMENTO DE POÇOS E FONTES NA SOLUÇÃO NUMÉRICA DE PROBLEMAS DE PERCOLAÇÃO The Treatment of Sinks and Sources in the Numerical Solution of Seepage Problems

JOSÉ COUTO MARQUES

Professor Associado, Departamento de Engenharia Civil, FEUP,
Rua Dr. Roberto Frias, s/n, 4200-465 Porto, Portugal, jmarques@fe.up.pt

Resumo

Pretende-se com este trabalho chamar a atenção para um cuidado a ter na determinação pelo método dos elementos finitos das linhas de fluxo em problemas de percolação com poços ou fontes, isto é, quando existe extracção ou injeccção de caudal em pontos do domínio. A presença deste tipo de singularidade, por exemplo na modelação de um aquífero homogéneo com escoamento plano, corresponde, em termos físicos simples, à existência de um orifício de raio infinitesimal em torno de cada um desses pontos do domínio, que por este motivo deixa de ser simplesmente conexo, isto é, já não pode percorrer-se toda a sua fronteira com um lápis sem o levantar do papel. Todavia a determinação das linhas de fluxo, através da solução da equação quase-harmónica expressa em termos da função de corrente, requer que o domínio seja simplesmente conexo, o que neste caso particular se consegue com uma pequena transformação por corte da malha de elementos finitos, que será ilustrada com um exemplo numérico de aplicação dessa simples técnica.

Palavras-chave: Elementos finitos, linhas de corrente, domínio simplesmente conexo, corte da malha.

Abstract

This paper highlights one particular obstacle that arises in the finite element determination of flow lines in seepage problems with sinks or sources, when there is extraction or injection of water at points of the domain. The presence of this type of singularity, e.g. when modelling a homogeneous aquifer with plane flow, corresponds, in simple physics terms, to the existence of a hole of infinitesimal radius surrounding each one of such points of the domain, which therefore ceases to be simply connected because it is no longer possible to trace the whole boundary without lifting pen from paper. However the determination of flow lines, through the solution of the quasi-harmonic equation formulated in terms of the flow function, requires that the domain be simply connected, which can be achieved in this particular case with an expedient transformation of the finite element mesh by cutting, as will be illustrated with an application example of such simple technique.

Keywords: Finite elements, flow lines, simply connected domain, mesh cutting procedure.

1. Introdução

Em qualquer problema de percolação a rede de fluxo desempenha um importante papel ao permitir a visualização do padrão geral do escoamento, bem como a determinação de caudais e outras grandezas de interesse, fornecendo deste modo valiosos elementos para o estudo da segurança em relação a fenómenos de instabilidade de origem hidráulica.

A rede de fluxo é constituída por duas famílias de linhas: as equipotenciais, ao longo das quais a carga hidráulica é constante, e as linhas de corrente, que representam trajectórias de partículas de água, sendo portanto tangentes ao vector velocidade de percolação (Matos Fernandes, 2006). A rede de escoamento era traçada manualmente antes do advento dos métodos numéricos, com o apoio de engenhosos métodos gráficos, como por exemplo a clássica construção de Casagrande (1937) para o desenho da linha de saturação em problemas não confinados (Couto Marques *et al.*, 2006).

Hoje em dia o recurso ao método dos elementos finitos veio simplificar enormemente esta tarefa, permitindo obter com grande comodidade e rapidez resultados como os ilustrados na Figura 1, referentes à percolação em regime permanente em torno de uma ensecadeira com grande desenvolvimento em planta.

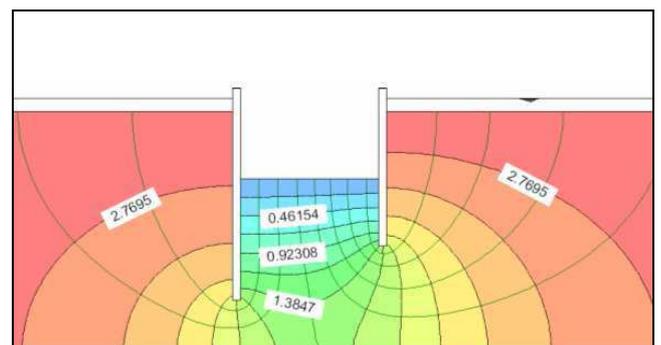


Figura 1. Rede de escoamento numa ensecadeira com cortinas assimétricas.

2. Equipotenciais e Linhas de Corrente

O campo da carga total na percolação em regime permanente através de um solo saturado é regido pela chamada equação quase-harmónica e respectivas condições de fronteira. Esta equação é dada em notação indicial por

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (k_{ij} \frac{\partial \phi}{\partial x_j}) - Q = 0 \quad (i,j=1, 2, 3) \quad [1]$$

em que x_i e x_j representam as coordenadas cartesianas, k_{ij} o tensor de permeabilidade, ϕ a função potencial, que se pode assimilar à carga total (soma da cota geométrica com a altura piezométrica), e Q é a alimentação específica (Zienkiewicz *et al.*, 2005).

Num problema bidimensional as linhas equipotenciais são curvas de nível da carga total, determinadas a partir dos valores numéricos desta obtidos nos nós da malha de elementos finitos.

A Eq. [1] obtém-se introduzindo a velocidade dada pela lei de Darcy

$$v_i = -k_{ij} \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \quad [2]$$

na equação da continuidade, que traduz o princípio da conservação da massa através de

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i} + Q = 0 \quad [3]$$

A velocidade pode também exprimir-se em termos da função de corrente ψ , o que num escoamento no plano (x,y) leva a

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad [4]$$

Utilizando esta equação na lei de Darcy (Eq. [2]) obtemos uma relação entre as funções potencial e de fluxo, que no caso bidimensional vem dada por

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = -k_{xx} \frac{\partial \phi}{\partial x} - k_{xy} \frac{\partial \phi}{\partial y}, \quad -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -k_{xy} \frac{\partial \phi}{\partial x} - k_{yy} \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad [5]$$

Resolvendo este sistema de equações em ordem a $\partial \phi / \partial x_i$ conclui-se que

$$-\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{1}{P} \left(k_{xy} \frac{\partial \psi}{\partial x} + k_{yy} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right), \quad -\frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{1}{P} \left(k_{xx} \frac{\partial \psi}{\partial x} + k_{xy} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \quad [6]$$

em que P representa o determinante da matriz de coeficientes k_{ij} do referido sistema. Notando agora que,

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \quad [7]$$

da Eq. [6] obtém-se finalmente

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{P} \left(k_{xx} \frac{\partial \psi}{\partial x} + k_{xy} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{1}{P} \left(k_{xy} \frac{\partial \psi}{\partial x} + k_{yy} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \right] = 0 \quad [8]$$

ou, em forma mais compacta, realçando a semelhança com a Eq. [1],

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{P} k_{ij} \frac{\partial \psi}{\partial x_j} \right) = 0 \quad [9]$$

Esta é a equação quase-harmónica expressa em termos da função ψ , que, conjuntamente com as respectivas condições de fronteira, rege o campo da função de corrente, cujas curvas de nível são as linhas de fluxo.

3. Poços e Fontes

Os poços e fontes correspondem à extracção ou injeccção de caudal em zonas pontuais do domínio. Por exemplo, num problema de percolação em plano vertical, um poço pode modelar o efeito de um dreno linear disposto perpendicularmente a esse plano (Kazda, 1990). Já no caso dos aquíferos os poços podem traduzir a bombagem localizada de água, enquanto que a alimentação é geralmente realizada de forma mais distribuída ao longo do domínio e/ou suas fronteiras, seja por precipitação e infiltração, seja a partir de cursos de água (como é o caso do exemplo de aplicação que a seguir se apresenta).

A existência de poços e fontes constitui uma situação com certa analogia com a das cargas concentradas em problemas mecânicos, na medida em que envolve um caso limite, admissível em termos de modelo matemático mas sem contrapartida física real, já que não é exequível aplicar uma carga num ponto ou dele extrair caudal.

E é exactamente pelo recurso a uma explicação física simples que melhor se apreenderá, quer o problema criado pela presença deste tipo de singularidade, quer uma técnica expedita para a sua solução.

De facto os poços e fontes podem ser visualizados, num modelo bidimensional, como aberturas circulares de raio infinitesimal, cuja existência vem tornar o domínio numa região não simplesmente conexa, isto é, deixa de ser possível percorrer toda a sua fronteira sem levantar o lápis do papel.

Esta circunstância leva a que a solução da equação quase harmónica expressa em termos da função de corrente produza resultados incorrectos, impossibilitando deste modo a obtenção das linhas de fluxo para a construção da rede de escoamento.

Para tornear este obstáculo é necessário transformar o domínio numa região simplesmente conexa, o que se consegue pela introdução de cortes na malha de elementos finitos, com duplicação de nós, de modo a ligar a fronteira exterior ao ponto ou pontos onde se situam os poços ou fontes, conforme sugerido por Aalto (1984).

No contexto da aplicação do método dos elementos finitos a este tipo de problemas, é necessário obter uma primeira solução, que parte da Eq. [1] utilizando uma malha-base, sem cortes, mas em que houve o cuidado de fazer coincidir os poços e as fontes com nós. Obtém-se assim os valores nodais da carga total, que permitem o traçado das linhas equipotenciais.

Em seguida, procede-se à introdução de cortes de espessura nula na malha, partindo de cada poço ou fonte em direcção ao contorno exterior da mesma. Estes cortes separam elementos finitos existentes, pelo que não há alteração aparente da geometria da malha mas apenas duplicação de nós, ficando os nós de cada par coincidentes ao longo do trajecto de cada corte. Com uma segunda solução, que parte da Eq. [9] utilizando a malha cortada, determinam-se os valores nodais da função de corrente e daí as linhas de fluxo. Esta estratégia será em seguida ilustrada com um pequeno exemplo de aplicação.

4. Exemplo Numérico

Consideremos o problema da determinação da rede de fluxo no aquífero homogêneo com escoamento plano da Figura 2, alimentado por um rio com $0,24 \text{ m}^3/(\text{dia.m})$ e sujeito à extracção de $1200 \text{ m}^3/(\text{dia.m}^3)$ no Poço 1 e $2400 \text{ m}^3/(\text{dia.m}^3)$ no Poço 2 (Reddy, 1984). As fronteiras horizontais são impermeáveis.

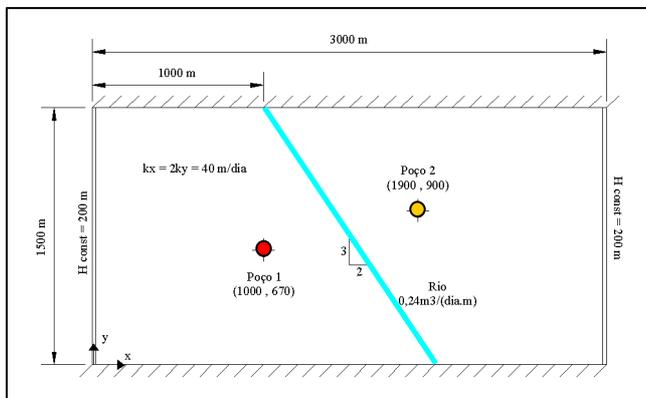


Figura 2. Geometria e condições de fronteira do problema de percolação num aquífero.

A malha-base de elementos finitos da Figura 3 (Malha B) foi gerada de modo a fazer coincidir os dois poços com pontos nodais e o rio com lados de elementos. O caudal com que o rio ao longo do seu curso vai alimentando o aquífero tem uma certa analogia com a carga distribuída aplicada em lados de elementos nos problemas mecânicos.

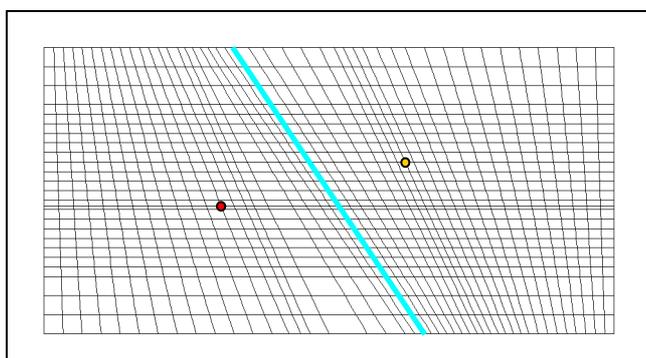


Figura 3. Geometria da malha-base de elementos finitos (Malha B).

Na Figura 4 estão representadas as linhas equipotenciais, calculadas sem dificuldade a partir da Malha B.

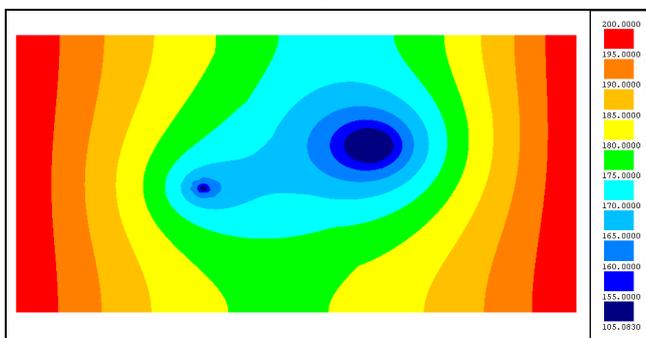


Figura 4. Linhas equipotenciais obtidas com a Malha B.

A Figura 5 ilustra os resultados obtidos para as linhas de corrente também com a Malha B, sendo patente a sua completa falta de sentido.

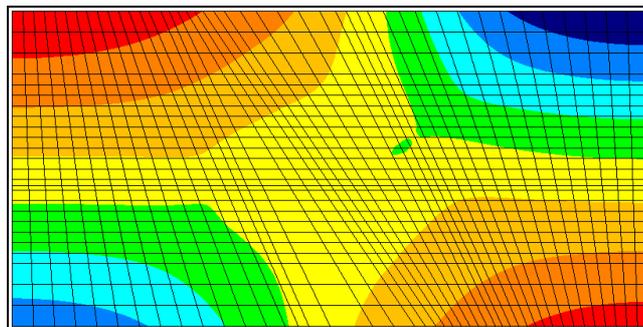


Figura 5. Linhas de corrente obtidas com a Malha B.

A Figura 6 esquematiza a estratégia adoptada para a alteração da Malha B com a finalidade de transformar o domínio numa região simplesmente conexa.

São introduzidos dois cortes oblíquos de espessura nula entre cada poço e a fronteira do domínio mais próxima, através da duplicação dos nós situados ao longo do trajecto de cada corte.

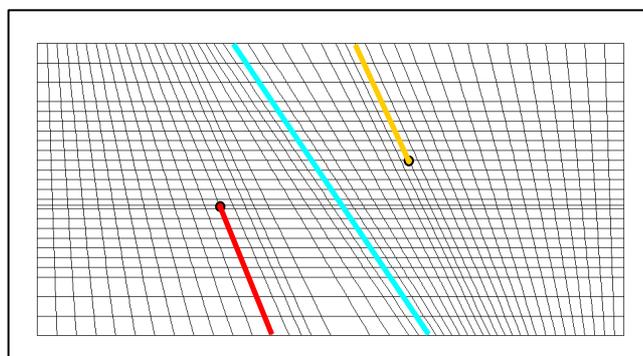


Figura 6. Criação da Malha C por introdução de cortes na Malha B.

Passa assim a haver ligação entre a fronteira exterior rectangular e as duas fronteiras interiores circulares, voltando a ser possível percorrer todo o contorno do domínio sem levantar o lápis do papel, conforme se procura evidenciar na Figura 7, exagerando quer a espessura dos cortes, quer o diâmetro dos poços.

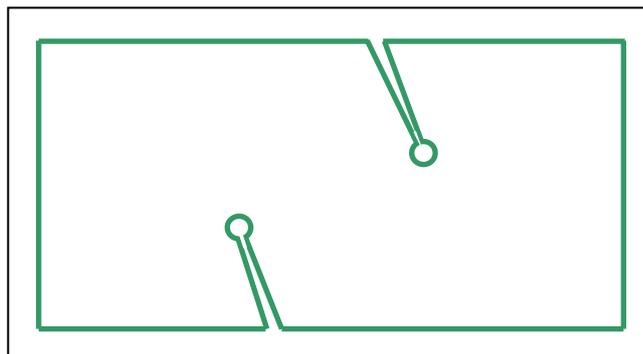


Figura 7. Representação esquemática da fronteira da Malha C.

A Figura 8 apresenta as linhas de corrente obtidas após o corte da malha, de forma a tornar o domínio simplesmente conexo. A qualidade do resultado é substancialmente superior quando comparada com a da Figura 5, podendo agora constatar-se a confluência das linhas de fluxo em direcção aos poços, como seria de esperar. A inclusão na Figura 8 dos vectores de velocidade de percolação permite apreciar a sua relação de tangência com as linhas de fluxo.

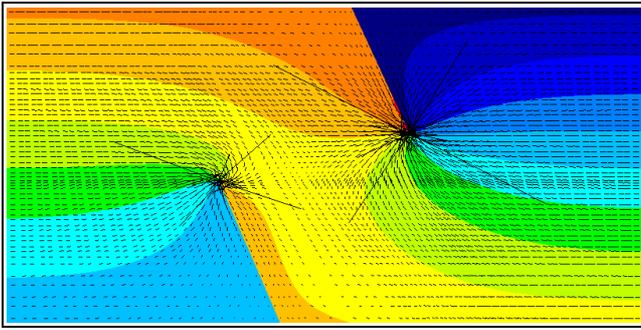


Figura 8. Linhas de corrente obtidas após a introdução de cortes na Malha B.

5. Conclusões

Este exemplo numérico ilustra de forma eloquente a eficácia do procedimento acima descrito para obtenção da rede de escoamento em problemas de percolação com a presença de poços ou fontes.

Agradecimentos

Uma palavra de reconhecimento é devida aos meus Alunos da Especialização em Geotecnia que ao longo dos anos têm partilhado comigo o interesse por estas questões.

Referências

- Aalto, J. (1984). *Finite element seepage flownets*, International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, Vol. 8, No. 3, 297-303. ISSN 0363-9061.
- Casagrande, A. (1937). *Seepage through dams*, Journal of the New England Water Works Association, 51, 131-172. ISSN 0028-4939.
- Couto Marques, J.; Oliveira P.; Lopes, S. (2006). *Percolação não confinada – uma comparação de métodos de solução*, 1^{as}. Jornadas de Hidráulica, Recursos Hídricos e Ambiente, FEUP, 93-96. ISBN 978-989-95557-0-9.
- Kazda; I. (2006). *Finite Element Techniques in Groundwater Flow Studies with Applications in Hydraulic and Geotechnical Engineering*, Developments in Geotechnical Engineering 61, Elsevier, Amsterdam, 313 pp. ISBN 0-444-98810-6.
- Matos Fernandes; M. (2006). *Mecânica dos Solos – Conceitos e Princípios Fundamentais, Volume I*, FEUP Edições, Porto, 451 pp. ISBN 972-752-086-3.
- Reddy, J.N. (1984). *An Introduction to the Finite Element Method*, McGraw-Hill, New York, 495 pp., ISBN 0-07-051346-5.
- Zienkiewicz, O.C.; Taylor, R.L.; Zhu, J.Z. (2005). *The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals*, Butterworth-Heinemann Ltd., Oxford, 752 pp., ISBN 978-0750663205.