

MODELAÇÃO INVERSA DE FUNDOS COM DADOS DA ELEVAÇÃO DA SUPERFÍCIE LIVRE Bathymetry inverse modelling with free surface elevation data

ANA SOFIA MESQUITA ⁽¹⁾ & PAULO AVILEZ-VALENTE ⁽²⁾

⁽¹⁾ Estudante de Doutoramento, FEUP/CEHRA,

Rua Dr. Roberto Frias, P-4200-465 Porto, asofia@fe.up.pt

⁽²⁾ Professor Auxiliar, FEUP/CEHRA,

Rua Dr. Roberto Frias, P-4200-465 Porto, pvalente@fe.up.pt

Resumo

Um modelo a duas dimensões horizontais, baseado nas equações do tipo Boussinesq, é utilizado para a reconstrução da batimetria em áreas de água pouco profunda, a partir de informação conhecida da elevação da superfície livre. O modelo é composto por dois algoritmos: o algoritmo de inversão da celeridade e o algoritmo de inversão da profundidade. A celeridade de fase da onda é determinada a partir de um ou mais pares de campos de distribuição espacial da elevação da superfície livre, separados no tempo de uma fracção do período da onda. O segundo algoritmo permite estimar a profundidade, partindo do conhecimento da celeridade de fase local e da elevação da superfície livre num dado instante.

As equações de inversão da profundidade são deduzidas a partir de um modelo do tipo Boussinesq para propagação de ondas não lineares e dispersivas. Na discretização das equações é utilizado um método de elementos finitos. O modelo é testado para duas configurações batimétricas, com distribuições espaciais da elevação da superfície livre geradas numericamente pelo programa computacional FUNWAVE: banco de areia elíptico e quebramar rasgado por um canal. São apresentados resultados dos erros local e global da batimetria reconstruída.

Palavras-chave: Equações de Boussinesq, Reconstrução Batimétrica, Elementos Finitos.

Abstract

A horizontal two-dimensional model, based on the Boussinesq equations, is presented for bathymetry reconstruction in shallow waters, from spatially dense data of the water surface elevation. The model is composed by two algorithms: a wave velocity inversion algorithm and a depth inversion algorithm. The wave velocity is computed from one or more pairs of spatial distributions of the surface elevation, separated in time of a fraction of a wave period. The second algorithm estimates the water depth from both the wave velocity and the surface elevation.

The depth inversion equations are deduced from a Boussinesq-type model for weakly nonlinear dispersive waves. A finite element method is used for spatial discretization of the equations. The model is tested for two bathymetries using surface information generated by the FUNWAVE computational code: an elliptic shoal and a bar with a rip current channel. The local and global errors of the reconstructed bathymetry are presented.

Keywords: Boussinesq Equations, Bathymetric Reconstruction, Finite Elements.

1. Introdução

O conhecimento da morfologia do fundo oceânico, particularmente em zonas costeiras, é de primordial importância em muitos problemas de engenharia costeira, e é fundamental para garantir uma eficaz segurança na navegação.

Como consequência da grande dinâmica dos sistemas hídricos, os levantamentos tornam-se rapidamente desactualizados, visto que os processos de erosão e deposição provocam variações rápidas na topografia do fundo. Contudo, a realização de levantamentos hidrográficos frequentes através dos tradicionais métodos de medição *in situ*, tem um custo financeiro e logístico elevado.

Por isso, há um crescente interesse científico, no desenvolvimento de um método alternativo mais económico e versátil. Graças ao desenvolvimento das técnicas de detecção remota, o desenvolvimento de métodos de inversão da profundidade tornou-se uma alternativa viável.

Nos últimos anos surgiram vários métodos de inversão da profundidade usando informação proveniente de técnicas de detecção remota (e.g. Dugan *et al.*, 1996, Wu and Juang, 1996, Bell, 1999, Stockdon and Holman, 2000, Dugan *et al.* 2001, Holland, 2001, Dugan *et al.* 2002). Estes métodos recorrem a imagens *timestacks*, que consistem em séries temporais da intensidade luminosa de uma matriz de pontos da imagem posicionados em linhas transversais e longitudinais à linha de costa.

Estes métodos diferem entre si, essencialmente no tipo de instrumentação remota utilizada para obter as imagens sequenciais da superfície oceânica: câmaras de vídeo (Bell, 1999), radar em banda-X (Stockdon and Holman, 2000), sensores de infravermelhos (Dugan *et al.*, 1996), sensores de pressão (Holland, 2001) e fotogrametria óptica (Dugan *et al.*, 2002).

Através de uma análise de Fourier às séries temporais da intensidade luminosa, são determinadas as principais características das ondas: celeridade de fase, direcção, período e comprimento de onda. Na maior parte destes métodos a profundidade é determinada explicitamente a partir da relação de dispersão linear,

$$C^2 = \frac{g}{k} \tanh(kh), \quad [1]$$

em que C representa a celeridade, k é o número de onda, $2\pi/\lambda$, sendo λ o comprimento da onda, h a profundidade da água a determinar e g a aceleração da gravidade. Os métodos de inversão da profundidade, baseados na relação de dispersão linear, originam bons resultados em zonas de água intermédia, onde a celeridade das ondas depende apenas da profundidade e do número de onda. No entanto, em zonas de água pouco profunda, a profundidade é sobrestimada, dado que a celeridade das ondas quando entram em águas mais profundas é, na realidade, superior à celeridade que é dada pela relação de dispersão linear.

Grilli (1998) desenvolveu dois algoritmos onde tem em conta os efeitos dispersivos da frequência e da amplitude. Recorrendo a imagens de vídeo ou radar, obtidas por técnicas de detecção remota, calcula a celeridade de fase e o comprimento de onda. A partir de uma série de ensaios numéricos, usando um modelo de ondas não linear baseado na teoria potencial, determina uma relação empírica para a celeridade, em função da profundidade relativa, kh , e da altura de onda ao largo. Essa expressão é posteriormente invertida para determinar a profundidade. Foram obtidos bons resultados nos ensaios numéricos efectuados. Contudo este modelo está limitado a domínios unidimensionais e a situações sem ocorrência de rebentação.

Tendo em conta a importância dos efeitos não lineares na determinação da profundidade em águas pouco profundas, foram desenvolvidos modelos de inversão baseados nos modelos de equações para propagação de ondas dispersivas e não lineares.

Misra *et al.* (2003) desenvolveram um modelo de inversão da profundidade a uma dimensão horizontal (1DH) baseado no modelo de equações do tipo Boussinesq desenvolvido por Wei *et al.* (1995), e mais tarde modificado por Kennedy *et al.* (2000) e Chen *et al.* (2000). Este modelo tem em conta não só fenómenos de não-linearidade, dispersão da amplitude e da frequência, como também fenómenos de emolamento (linear e não linear), difracção, refracção pelo fundo e devida às correntes, geração de harmónicas e dissipação de energia por rebentação. A celeridade de fase é determinada recorrendo a um ou mais pares de perfis da elevação da superfície livre ou da velocidade orbital das partículas, separados no tempo por um curto intervalo, através da aplicação de um método de mínimos quadrados.

Misra *et al.* (2003) conseguiram reduzir os erros nas estimativas da profundidade nas zonas de água pouco profunda encontrados por outros métodos de inversão baseados na relação de dispersão linear.

Baseado no mesmo modelo de equações, Kennedy *et al.* (2000) apresentaram um modelo de inversão a duas dimensões horizontais (2DH) para determinar a profundidade usando simultaneamente dados da elevação da superfície livre e da velocidade. A celeridade é determinada a partir de duas imagens instantâneas (*snapshots*) da elevação da superfície livre e da velocidade, separadas no tempo por um curto intervalo, através de técnicas de correlação cruzada.

Recentemente, Catalán e Haller (2005), apresentaram um método de inversão da profundidade baseado na relação de dispersão não linear, proposta por Kirby e Dalrymple (1986),

$$C^2 = (1 + f_1^5 \varepsilon^2 D) \tanh(kh + f_2^4 \varepsilon), \quad [2]$$

que é essencialmente uma combinação da teoria de Stokes de segunda ordem, válida para águas profundas a intermédias, e da teoria de Hedges (2001) para águas pouco profundas. Na expressão [2], $f_1 = \tanh(kh)$ e $f_2 = kh / \sinh(kh)$ são os parâmetros que permitem a ligação das duas teorias e $\varepsilon = kH/2$ é um parâmetro de não linearidade, sendo H a altura de onda. A frequência e a celeridade de fase são determinadas através da análise estatística de imagens captadas por um sistema automatizado de estações de vídeo (ARGUS). Catalán e Haller (2005) conseguem reduzir os erros nas estimativas da profundidade nas zonas de água pouco profunda encontrados por outros métodos de inversão, baseados na relação de dispersão linear.

Nieto *et al.* (2004) desenvolveram recentemente um algoritmo de inversão para estimar a elevação da superfície livre a partir de imagens de radar. Este algoritmo foi entretanto aplicado por Hessner *et al.* (2006), tendo obtido estimativas para a elevação da superfície livre próximas dos valores medidos *in situ*. Acredita-se que os futuros desenvolvimentos na área de detecção remota permitirão obter mapas da elevação da superfície livre sobre qualquer região da superfície oceânica.

Com base nesta premissa, é desenvolvido um modelo de inversão a 2DH, baseado num modelo de equações do tipo Boussinesq para a reconstrução batimétrica em áreas de água pouco profunda, a partir de dados da elevação da superfície livre. O modelo é uma extensão ao caso 2DH do modelo proposto por Misra *et al.* (2003), sendo composto por dois algoritmos: algoritmo de inversão da celeridade e algoritmo de inversão da profundidade. O algoritmo de inversão da celeridade tem por base um método de mínimos quadrados. Dada a complexidade das equações do modelo do tipo Boussinesq, seguido por Misra *et al.* (2003) a 2DH, recorreu-se a um modelo do tipo Boussinesq com uma formulação mais simples para o desenvolvimento do modelo de inversão.

O modelo de equações para a propagação de ondas fracamente não lineares e dispersivas, proposto por Peregrine (1967), foi o modelo utilizado. A aplicação do modelo aqui desenvolvido está limitada a domínios com profundidades relativas tais que $kh < \pi/2$, sensivelmente.

Este facto constitui uma desvantagem relativamente ao modelo apresentado por Kennedy *et al.* (2000). No entanto, requer apenas uma variável para a inversão da profundidade: a elevação da superfície livre. Além disso, quer em Misra *et al.* (2003) quer em Kennedy *et al.* (2000), as equações de inversão são resolvidas pelo método das diferenças finitas. Contudo, o domínio computacional nem sempre é regular. Nas situações de domínio irregular, o método dos elementos finitos é mais apropriado, uma vez que as equações podem ser discretizadas em malhas não estruturadas e irregulares.

Na Secção 2 é apresentado o modelo de inversão da celeridade a 2DH, baseado num método de mínimos quadrados. Na mesma secção é também descrito o algoritmo de inversão da profundidade, o qual permite determinar a batimetria com base no conhecimento da celeridade e de um campo de distribuição da elevação da superfície num dado instante. Na Secção 3 são apresentados os resultados relativos à aplicação do modelo de inversão para a reconstrução de duas batimetrias distintas: a primeira, um banco de areia elíptico situado sobre um plano inclinado; e a segunda, um quebramar rasgado por um canal. Foram utilizadas distribuições da elevação da superfície livre geradas numericamente pelo programa computacional FUNWAVE (Kirby *et al.*, 1998). Finalmente, na Secção 4 são enumeradas algumas conclusões sobre os resultados obtidos.

2. Formulação Matemática

2.1. Modelo de Inversão da Celeridade

Imagens sequenciais da superfície oceânica podem ser obtidas a partir de sistemas radar ou vídeo. Através do processamento das imagens é possível obter mapas instantâneos da elevação da superfície livre.

Conhecidas as distribuições espaciais da elevação da superfície livre, separadas temporalmente de um intervalo Δt é possível determinar a celeridade de fase através da aplicação de um método de mínimos quadrados. A estimativa da celeridade parte da hipótese de que a forma da onda não se altera durante um curto período de tempo, i.e.

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{dx}{dt} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{dy}{dt} \frac{\partial}{\partial y} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial t} = -C \frac{\partial}{\partial s}, \quad [3]$$

em que s representa a direcção de propagação da onda e C a sua celeridade. Isto implica que conhecendo a celeridade de fase local da onda é possível transladar no espaço a primeira imagem da superfície livre para a segunda, obtida num instante de tempo posterior. O domínio espacial é discretizado em elementos finitos. O cálculo da celeridade em cada nó da malha de elementos finitos é realizado recorrendo a técnicas de filtragem.

Considerem-se dois sinais espaciais da elevação da superfície livre, $f(\mathbf{x})$ e $g(\mathbf{x})$, onde $\mathbf{x} \equiv (x, y)$. Seja $\xi \equiv (\xi_x, \xi_y)$ o atraso espacial bidimensional entre os dois sinais. O erro quadrático para uma dado atraso ξ é definido por

$$\varepsilon(\xi) = \int_{\mathcal{W}} [f(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x} + \xi)]^2 d\mathcal{W}, \quad [4]$$

em que \mathcal{W} representa uma célula de filtragem de tamanho $W \times W$ centrada em \mathbf{x}_0 , da ordem da grandeza do comprimento de onda. O atraso espacial, ξ_{\min} que minimiza este erro é tal que

$$\left. \frac{d\varepsilon(\mathbf{x}_0, \xi)}{d\xi} \right|_{\xi=\xi_{\min}} = 0. \quad [5]$$

Nestas condições, o vector celeridade de fase é dado por

$$\mathbf{C}(\mathbf{x}_0) = \frac{1}{\Delta t} \xi_{\min}(\mathbf{x}_0), \quad [6]$$

em que Δt corresponde ao atraso temporal entre os dois sinais, $f(\mathbf{x})$ e $g(\mathbf{x})$. $\mathbf{C} = (C_x, C_y)$ representa o vector celeridade sendo $\|\mathbf{C}\| = C$. Uma descrição detalhada do algoritmo encontra-se em Mesquita e Avilez-Valente (2008).

2.2. Modelo de Inversão da Profundidade

2.2.1. Equações de inversão

As equações hidrodinâmicas do modelo de inversão da profundidade são deduzidas a partir das equações do modelo clássico de Boussinesq (Peregrine, 1967) para fundos de variação suave, sem rebentação, e sem atrito:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \nabla[(h + \zeta)\bar{\mathbf{u}}] &= 0, \\ \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} + (\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla)\bar{\mathbf{u}} + g\nabla\zeta - \nabla \cdot \left(\frac{h^2}{3} \nabla \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} \right) &= 0. \end{aligned} \quad [7]$$

A função ζ denota a elevação da superfície livre acima do nível de repouso, $\bar{\mathbf{u}} = (\bar{u}, \bar{v})$ é a média vertical instantânea do vector velocidade horizontal, e h é a profundidade local, em relação ao nível de repouso, Figura 1.

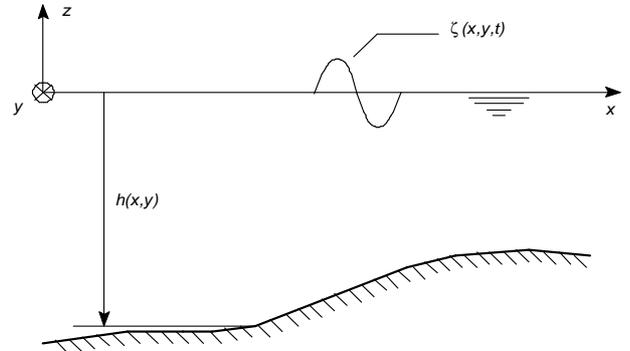


Figura 1. Secção vertical do escoamento.

O procedimento para obter as equações de inversão da profundidade consiste em eliminar a variável t das equações [6]. Seja θ o ângulo que a direcção de propagação da onda periódica e progressiva, s , faz com o eixo OX . Admitindo a irrotacionalidade do escoamento, a ausência de correntes e uma variação muito gradual de C com s , é possível, através de várias manipulações e rearranjos algébricos (Mesquita, 2006) chegar às seguintes equações de inversão:

$$\begin{aligned} C\zeta &= (h + \zeta)U_1, \\ CU_2 &= f + C\nabla \cdot \left(\frac{h^2}{3} \nabla U_2 \right), \end{aligned} \quad [8]$$

em que f representa a energia específica dada por,

$$f = \frac{1}{2} U_2^2 + g\zeta, \quad [9]$$

sendo U o valor algébrico da velocidade, tal que $\bar{u} = U \cos \theta$ e $\bar{v} = U \sin \theta$. Os índices 1 e 2 nas equações [8] denotam os valores algébricos da velocidade, calculados a partir das equações de continuidade e conservação da quantidade de movimento, respectivamente. Conhecidas as distribuições da celeridade C e da elevação da superfície ζ , o problema de inversão consiste em resolver as equações [8] para U_1 e U_2 e h , as quais podem ser reescritas como

$$(h + \zeta)U_1 = C\zeta, \quad (9)$$

$$C \left[U_2 - \nabla \cdot \left(\frac{h^2}{3} \nabla U_2 \right) \right] = \frac{1}{2} U_2^2 + g\zeta. \quad (10)$$

2.2.2. Formulação residual

De acordo com o modelo de inversão, equação [10], uma vez que a profundidade é uma incógnita, é arbitrada uma profundidade constante, h_0 , em todo o domínio. O problema clássico consiste em encontrar as funções U_1 e U_2 que verifiquem as equações [10] para qualquer ponto x pertencente ao domínio Ω . Seja \mathcal{V}_0^1 um espaço funcional constituído por funções com continuidade C^0 e lineares por bocados. A formulação residual fraca de Galerkin do modelo de inversão será: determinar as funções $\hat{U}_1, \hat{U}_2 \in \mathcal{V}_0^1$, tais que, qualquer que seja a função $\hat{\phi} \in \mathcal{V}_0^1$,

$$\int_{\Omega} \hat{\phi} (\bar{h} + \bar{\zeta}) \hat{U}_1 \, d\Omega = \int_{\Omega} \hat{\phi} C \zeta \, d\Omega, \quad (11)$$

$$\int_{\Omega} \hat{\phi} C \hat{U}_2 \, d\Omega - \int_{\Omega} \frac{Ch^2}{3} \nabla \hat{\phi} \cdot \nabla \hat{U}_2 \, d\Omega = \int_{\Omega} \hat{\phi} \hat{f} \, d\Omega$$

$$- \int_{\Gamma} \hat{\phi} \frac{Ch^2}{3} \nabla \hat{U}_2 \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma,$$

em que \bar{C} , \bar{h} , $\bar{\zeta}$ e $\overline{Ch^2}$ representam respectivamente, os valores médios das funções C , h , ζ e Ch^2 no interior de cada elemento finito, e \mathbf{n} é o versor normal externo à fronteira Γ . A variável \hat{U}_1 pode ser calculada explicitamente como $\hat{U}_1 = C\zeta/(h + \zeta)$. No entanto, verificou-se que este procedimento conduz ao aparecimento de oscilações na solução mostrando, portanto ser necessária a introdução de um processo de filtragem. Por isso recorre-se a uma formulação residual para o cálculo de \hat{U}_1 .

O domínio computacional é discretizado em elementos finitos triangulares. As soluções numéricas de \hat{U}_1 e \hat{U}_2 , assim como a função de elevação da superfície livre, ζ , e a função energia específica, \hat{f} , são interpoladas em cada elemento finito recorrendo a funções de forma naturais (Zienkiewicz e Morgan, 1983). Arbitra-se $\nabla \hat{U}_2 \cdot \mathbf{n} = 0$, anulando assim o integral de fronteira em [11]. Verificou-se em vários ensaios numéricos realizados, que esta aproximação não tem efeito significativo sobre os resultados no interior do domínio, sendo estes condicionados pelo valor da elevação da superfície livre, ζ . Com base nesta hipótese, mantém-se a simetria do sistema donde resulta que para qualquer $\hat{\phi} \in \mathcal{V}_0^1$,

$$\int_{\Omega} \hat{\phi} (\bar{h} + \bar{\zeta}) \hat{U}_1 \, d\Omega = \int_{\Omega} \hat{\phi} C \zeta \, d\Omega, \quad (12)$$

$$\int_{\Omega} \hat{\phi} C \hat{U}_2 \, d\Omega - \int_{\Omega} \frac{Ch^2}{3} \nabla \hat{\phi} \cdot \nabla \hat{U}_2 \, d\Omega = \int_{\Omega} \hat{\phi} \hat{f} \, d\Omega.$$

Os integrais do sistema de equações [12] são calculados por integração sobre cada elemento e as equações discretas são obtidas somando a contribuição de cada nó.

Dado que \hat{f} é um termo não linear, é necessário recorrer a um processo iterativo para a resolução da segunda equação do sistema [12]. Na primeira iteração, \hat{f} é calculada fazendo $\hat{U}_2 = 0$.

2.2.3. Actualização da profundidade

Não sendo $h = h_0$, os campos de velocidade calculados são necessariamente distintos. Com base nessa diferença constrói-se um algoritmo que permite a actualização da profundidade.

Considerem-se as equações de Saint-Venant (1871), para ondas longas não dispersivas na sua forma linearizada:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \nabla(h \bar{\mathbf{u}}) = 0, \quad (13)$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + g \nabla \zeta = 0.$$

Tendo em conta os dados até agora obtidos, ter-se-á, na ausência de correntes, e após algumas manipulações algébricas:

$$h_0 \hat{U}_1 = C\zeta, \quad (14)$$

$$C \hat{U}_2 = g\zeta.$$

Fazendo a razão entre a equação de continuidade e a equação de conservação da quantidade de movimento, obtém-se:

$$\frac{\hat{U}_1}{\hat{U}_2} = \frac{C^2}{gh}. \quad (15)$$

No modelo [13], a celeridade de fase é $C = \sqrt{gh}$. Admitindo que esta é uma boa aproximação da celeridade real, e fazendo $C = \sqrt{gh_1}$, sendo h_1 a primeira actualização da profundidade, resulta a seguinte relação

$$\frac{\hat{U}_1}{\hat{U}_2} = \frac{h_1}{h_2}. \quad (16)$$

Uma nova estimativa da profundidade pode ser calculada com base na razão entre \hat{U}_1 e \hat{U}_2 :

$$h_1 = h_2 \frac{\hat{U}_1}{\hat{U}_2}. \quad (17)$$

Para evitar oscilações na solução, a relação [17] é adaptada de forma a incluir um processo de filtragem, resultando a seguinte relação para a n -ésima actualização da profundidade

$$h_n(x_i, y_i) = h_{n-1}(x_i, y_i) \frac{\int_{\Omega_i} |\hat{U}_1(x_i, y_i)| \, d\Omega}{\int_{\Omega_i} |\hat{U}_2(x_i, y_i)| \, d\Omega}, \quad (18)$$

em que Ω_i representa uma janela de filtragem centrada no i -ésimo nó da malha de elementos finitos e que inclui todos os elementos vizinhos cujo centro de gravidade está situado a uma distância de (x_i, y_i) inferior a $W/2$. Após actualização, dois novos campos de velocidades \hat{U}_1 e \hat{U}_2 são calculados recorrendo às equações [12]. O critério de convergência do processo iterativo é baseado na diferença entre as velocidades calculadas \hat{U}_1 e \hat{U}_2 . O erro total em cada iteração, ε_U , é dado por

$$\varepsilon_U = \frac{\int_{\Omega} (\hat{U}_1 - \hat{U}_2)^2 d\Omega}{\int_{\Omega} (\hat{U}_1^2 + \hat{U}_2^2) d\Omega}. \quad [19]$$

Quando ε_U tende para um valor constante, contido numa tolerância pré-definida, o processo iterativo termina.

3. Ensaios Numéricos

3.1. Introdução

O modelo de inversão desenvolvido é testado para duas configurações geométricas. São ensaiadas apenas situações de agitação regular. Na ausência de informação obtida por técnicas remotas recorre-se a distribuições espaciais da elevação da superfície livre geradas numericamente pelo programa FUNWAVE, usando a versão não linear do modelo de Boussinesq descrito em Wei *et al.* (1995). A qualidade das estimativas da profundidade estimada e da profundidade real é aferida de duas formas:

- localmente, recorrendo ao erro local, $E_h(\mathbf{x})$, definido em percentagem por,

$$E_h(\mathbf{x}) = \left| \frac{h_{est}(\mathbf{x}) - h(\mathbf{x})}{h(\mathbf{x})} \right| \times 100, \quad [20]$$

em que h_{est} e h representam, respectivamente, a profundidade estimada e a profundidade real;

- globalmente, através do resíduo médio euclidiano adimensionalizado, RME, definido por ,

$$RME = \frac{\left(\int_{\Omega} [h_{est}(\mathbf{x}) - h(\mathbf{x})]^2 d\Omega \right)^{1/2}}{\int_{\Omega} h(\mathbf{x}) d\Omega}. \quad [21]$$

3.2. Baixo Elíptico Sobre um Plano Inclinado

A batimetria que se pretende reconstruir consiste num baixo elíptico situado sobre um plano com inclinação 1:50, cuja configuração está representada na Figura 2.

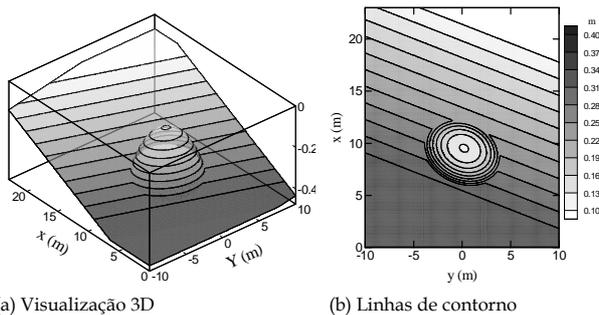


Figura 2. Geometria do baixo sobre fundo inclinado.

As curvas de nível do plano inclinado fazem um ângulo de 20° com o eixo OY . As profundidades máxima e mínima são $h=0.45$ m junto à fronteira de barlar e $h=0.07$ m junto à fronteira de sotamar, respectivamente. Esta batimetria corresponde à que foi utilizada em ensaios experimentais por Berkhoff *et al.* (1982).

Foi simulada uma onda regular com período $T=2$ s e amplitude $a=0.0116$ m, propagando-se no sentido positivo do eixo OX . Os correspondentes parâmetros de dispersividade e não linearidade, na zona mais profunda, são, respectivamente, $kh=0.729$ e $a/h=0.0278$. A dimensão útil do domínio computacional é de 23 m por 20 m. Foi adicionada uma esponja de absorção a barlar do gerador de ondas, localizado em $x=0$ m, com largura segundo x igual a 2 m, para absorver possíveis ondas reflectidas. Destinada à absorção das ondas geradas foi colocada em $x=23$ m uma segunda esponja com 3 m de largura. As fronteiras laterais do domínio para $y=-10$ m e $y=10$ m constituem paredes verticais do canal. A simulação desenvolveu-se para $t \in [0, 50]$ s com um incremento temporal de $\Delta t=0.005$ s. O domínio de cálculo foi discretizado com $\Delta x = \Delta y = 0.05$ m. Na Figura 3(a) está representada a distribuição da superfície livre no instante $t=40$ s. Atendendo às alturas de onda registadas, Figura 3b, é pouco provável a ocorrência de rebentação.

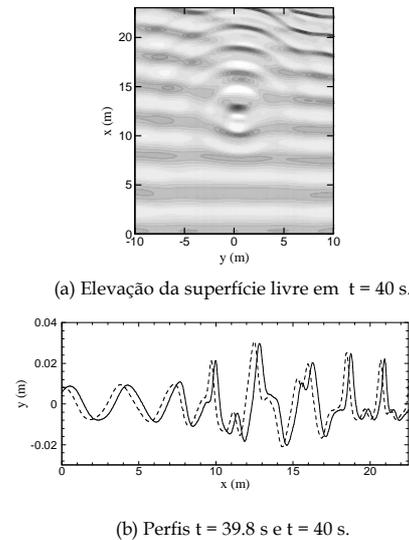
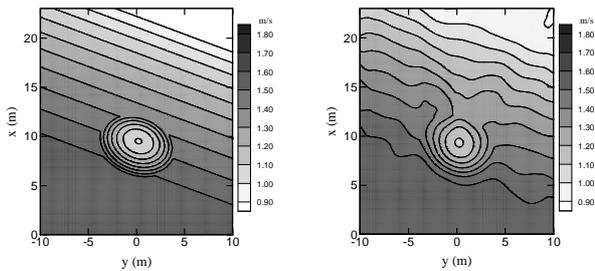


Figura 3. Elevação da superfície livre.

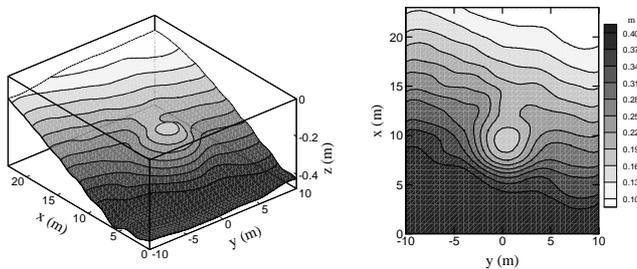
Para o cálculo da celeridade de fase local recorreu-se a um par de registos da elevação da superfície livre separados por um intervalo de tempo $\Delta t=0.375$ s. A malha computacional utilizada é constituída por 184000 elementos triângulos rectângulos uniformes ($\Delta x = \Delta y = 0.1$ m) e 92661 nós. A dimensão da célula de filtragem utilizada é de 3 m segundo x e 1.5 m segundo y . Na Figura 4 a celeridade estimada é comparada com a celeridade de fase de Airy. Os resultados são razoáveis tendo em conta que a celeridade de Airy não é exacta, dado que a não linearidade do modelo de propagação conduz à geração de harmónicas de ordem superior. A malha computacional utilizada para o cálculo da profundidade é uniforme e constituída por 3600 elementos triângulos rectângulos uniformes ($\Delta x = \Delta y = 0.5$ m) e 1886 nós.



(a) Celeridade de fase de Airy para $T = 2$ s. (b) Celeridade estimada.

Figura 4. Celeridade de fase.

A célula de filtragem usada tem uma forma aproximadamente circular com diâmetro igual a um comprimento de onda, ou seja, 3.88 m, na zona mais profunda. A profundidade inicialmente assumida pelo algoritmo foi $h_0 = 0.2$ m, constante em todo o domínio. A batimetria obtida pelo algoritmo de inversão da profundidade está representada na Figura 5.



(a) Visualização 3D (b) Linhas de contorno

Figura 5. Batimetria estimada do baixio elíptico sobre um plano inclinado.

A convergência da solução é atingida em 8 iterações. Na Figura 6 está representado o erro local E_h da batimetria reconstruída. O resíduo médio é $RME = 8.62 \times 10^{-2} \%$.

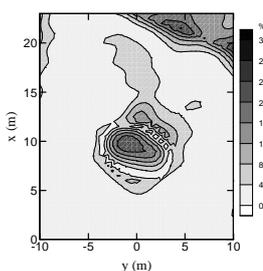


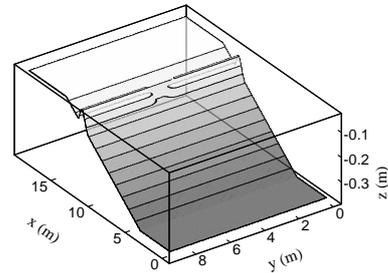
Figura 6. Erro local E_h da batimetria reconstruída.

3.3. Quebramar Rasgado por um Canal

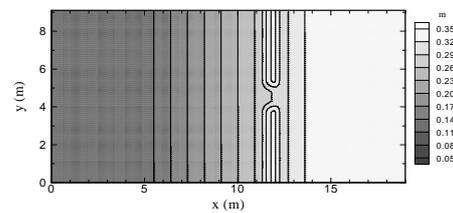
A batimetria que se pretende reconstruir consiste numa praia com inclinação 1:30, sobre a qual está situado um quebramar com largura aproximadamente igual a 1.8 m, Figura 7. Esta batimetria é muito semelhante à batimetria utilizada por Chen *et al.* (1999). A profundidade a barlar, em fundo plano, é $h = 0.373$ m. Sobre o coroamento e o pé do quebramar os valores da profundidade são $h = 0.048$ m e $h = 0.1$ m, respectivamente.

As dimensões das duas secções que constituem o quebramar são iguais: 1.25 m na direcção transversal e 3.25 m na direcção longitudinal.

Foram simuladas duas ondas regulares distintas sobre o fundo acima descrito: uma Onda A — ondulação sem rebentação; e uma Onda B — ondulação dando origem a rebentação.



(a) Visualização 3D.



(b) Linhas de contorno.

Figura 7. Geometria do quebramar rasgado por um canal.

3.3.1. Onda A — Ondulação sem rebentação

A primeira onda simulada tem um período $T = 1.5$ s e uma amplitude $a = 0.006$ m ($kh = 0.920$ e $a/h = 0.0161$). Durante a simulação não ocorre rebentação. O canal numérico tem 19 m de comprimento e 9.1 m de largura. A discretização escolhida para o domínio de cálculo foi $\Delta x = 0.05$ m e $\Delta y = 0.1$ m. A simulação numérica desenvolveu-se para $t \in [0, 50]$ s, com um incremento temporal de $\Delta t = 0.01$ s. Na Figura 8 está representado o campo de distribuição da elevação da superfície livre no instante $t = 40$ s.

Para o cálculo da celeridade de fase recorreu-se a dois registos da elevação da superfície livre, separados por um intervalo de tempo $\Delta t = 0.2$ s. Na Figura 9 estão representados perfis da elevação da superfície livre em dois instantes consecutivos ao longo de três secções transversais. A malha computacional utilizada para este cálculo era constituída por 72800 elementos triângulos rectângulos uniformes ($\Delta x = 0.05$ m e $\Delta y = 0.1$ m). A dimensão da célula de filtragem utilizada é de 2 m segundo x e 1 m segundo y .

Na Figura 10 a celeridade estimada é comparada com a celeridade de Airy para uma onda de período $T = 1.5$ s. Na Figura 11 estão representados os perfis da celeridade ao longo das mesmas secções transversais. A celeridade estimada e a celeridade de Airy, para uma onda de período $T = 1.5$ s, são coincidentes até ao coroamento do quebramar. Na base do quebramar, a barlar, os valores estimados afastam-se ligeiramente dos valores analíticos, possivelmente como consequência do processo de filtragem incluído no cálculo. Na região a barlar do quebramar, devido a efeitos não lineares, as ondas geradas propagam-se com uma celeridade ligeiramente superior à celeridade de fase de Airy.

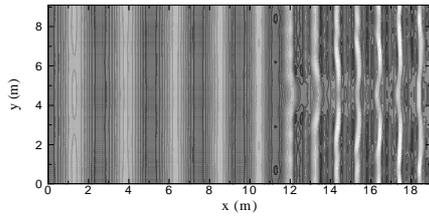
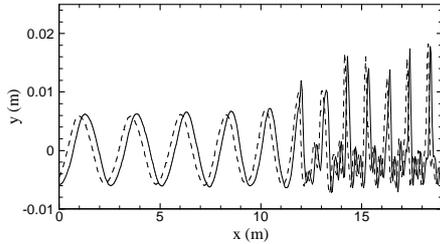
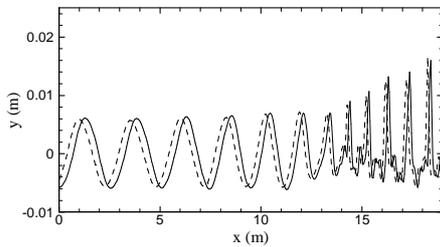


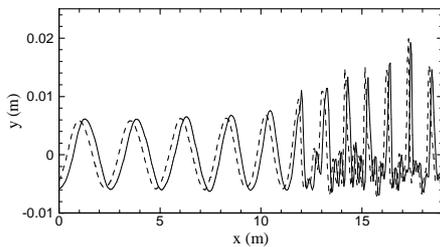
Figura 8. Onda A: elevação da superfície livre em $t = 40$ s.



(a) Secção longitudinal $y = 1.1$ m.

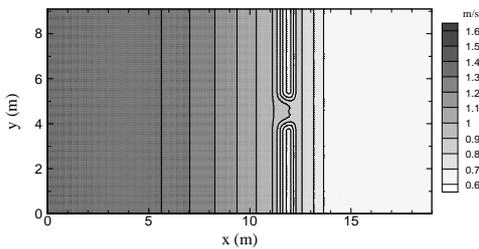


(b) Secção longitudinal $y = 4.6$ m.

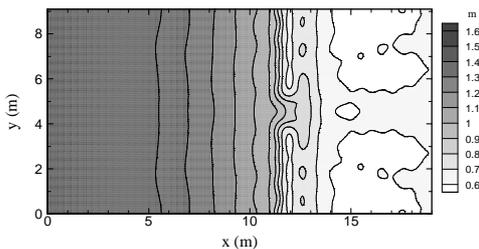


(c) Secção longitudinal $y = 7.6$ m.

Figura 9. Onda A: elevação da superfície livre em dois instantes consecutivos.

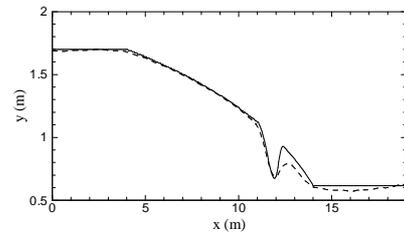


(a) Celeridade de fase de Airy para $T = 1.5$ s.

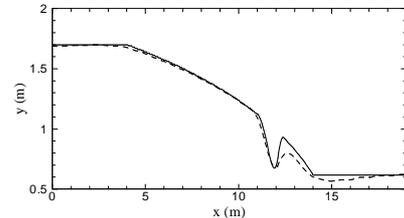


(b) Celeridade estimada.

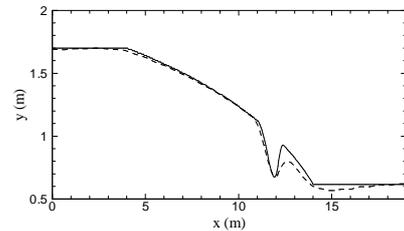
Figura 10. Onda A: celeridade de fase.



(a) Secção longitudinal $y = 1.1$ m.



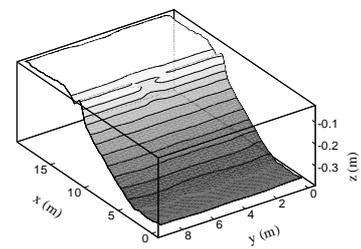
(b) Secção longitudinal $y = 4.6$ m.



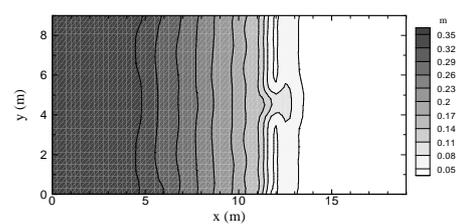
(c) Secção longitudinal $y = 7.6$ m.

Figura 11. Onda A: Celeridade de fase de Airy para $T = 1.5$ s (—) e celeridade de fase estimada (---).

A malha computacional utilizada para o cálculo da profundidade é uniforme e constituída por 4560 elementos triângulos rectângulos ($\Delta x = 0.25$ m e $\Delta y = 0.3$ m) e 2356 nós. A célula de filtragem tem uma forma aproximadamente circular com um diâmetro variando entre 2 m, nas primeiras iterações, e 1 m nas últimas iterações. A profundidade inicialmente assumida pelo algoritmo foi $h_0 = 0.2$ m em todo o domínio. A batimetria obtida está representada na Figura 12. A convergência da solução é atingida em 10 iterações, Figura 13. O resíduo médio é $RME = 8.618 \times 10^{-1} \%$.

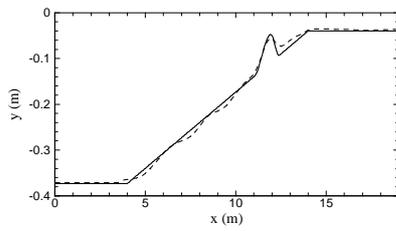


(a) Visualização 3D.

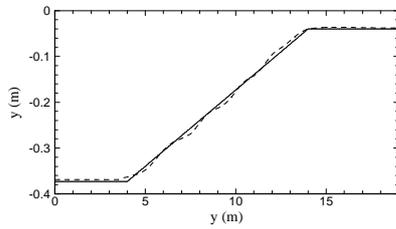


(b) Linhas de contorno.

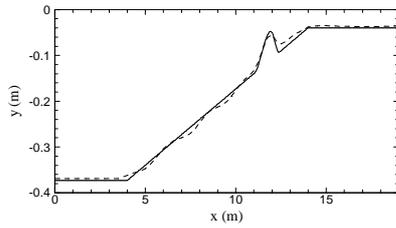
Figura 12. Onda A: geometria estimada do quebramar rasgado por um canal.



(a) Secção longitudinal $y = 1.1$ m.



(b) Secção longitudinal $y = 4.6$ m.



(c) Secção longitudinal $y = 7.6$ m.

Figura 13. Onda A: profundidade real (—) e profundidade estimada (---).

3.3.2. Onda A — Ondulação dando origem a rebentação

Pretende-se avaliar a eficiência do modelo de inversão na determinação da celeridade e da batimetria quando ocorre rebentação das ondas e formação de correntes. Note-se que o modelo de inversão desenvolvido não tem em conta estes dois fenómenos. Para o efeito, foi simulada uma onda de período $T = 1.5$ s e amplitude $a = 0.024$ m ($kh = 0.912$ e $a/h = 0.0634$). A simulação desenvolve-se para $t \in [0, 50]$ s com um incremento temporal $\Delta t = 0.01$ s. Foi usada a mesma discretização, $\Delta x = 0.05$ m e $\Delta y = 0.1$ m. Durante a simulação ocorre rebentação sobre o quebramar. Na Figura 14 está representado o campo de distribuição da elevação da superfície livre obtido no instante $t = 40$ s. Na Figura 15 estão representados perfis da elevação da superfície livre em dois instantes consecutivos, ao longo de três secções transversais.

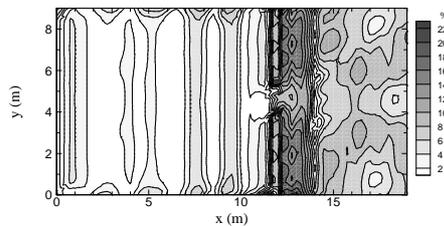


Figura 14. Onda A: erro local E_h da batimetria reconstruída.

Para o cálculo da celeridade recorre-se a dois campos de distribuição da superfície livre separados por intervalo de tempo de $\Delta t = 0.2$ s. O tipo e as dimensões da malha e da célula de filtragem são iguais aos utilizados no caso anterior com a Onda A.

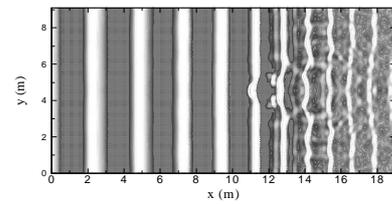
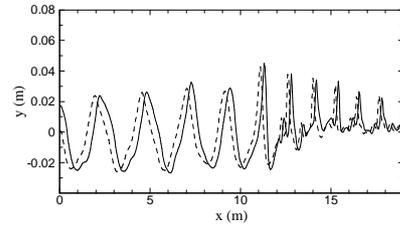
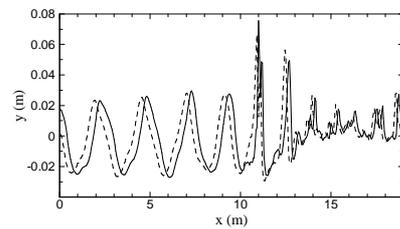


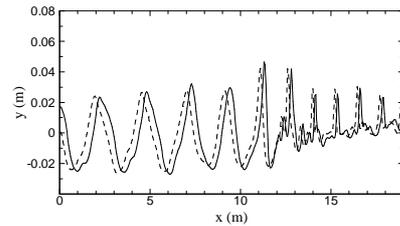
Figura 14. Onda B: elevação da superfície livre em $t = 40$ s.



(a) Secção longitudinal $y = 1.1$ m.



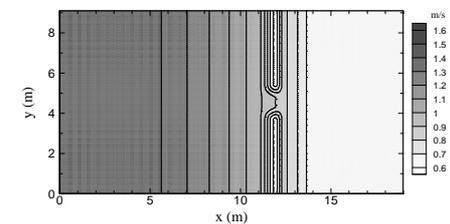
(b) Secção longitudinal $y = 4.6$ m.



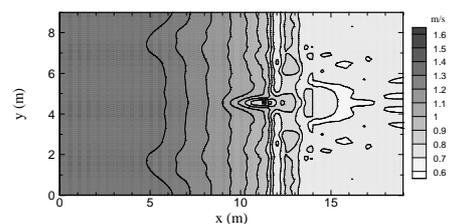
(c) Secção longitudinal $y = 7.6$ m.

Figura 15. Onda B: elevação da superfície livre em dois instantes consecutivos.

Na Figura 16 a celeridade estimada é comparada com a celeridade de fase de Airy para uma onda de período $T = 1.5$ s. Na Figura 17 estão representados os perfis da celeridade ao longo das mesmas secções transversais.



(a) Celeridade de fase de Airy para $T = 1.5$ s.

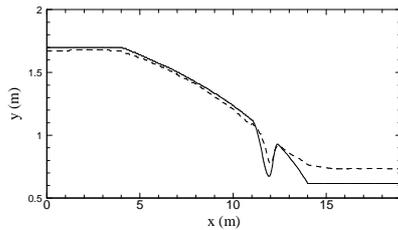


(b) Celeridade estimada.

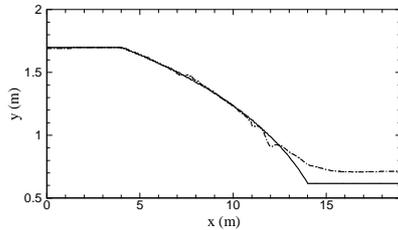
Figura 16. Onda B: celeridade de fase.

Até ao quebramar, a onda gerada mantém as características de onda regular, pelo que a celeridade estimada e a celeridade de Airy são idênticas. Na zona a sotamar do quebramar, onde a não linearidade é importante, as ondas propagam-se com uma celeridade superior à celeridade de Airy.

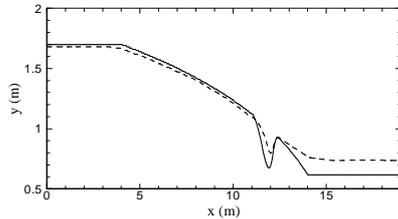
No cálculo da profundidade, o tipo e as dimensões da malha e da célula de filtragem são iguais aos utilizados no caso anterior com a Onda A. A profundidade inicialmente assumida foi também $h_0 = 0.2$ m. A batimetria obtida está representada na Figura 17. A convergência do modelo é atingida em 20 iterações. O resíduo médio é $RME = 2\%$.



(a) Secção longitudinal $y = 1.1$ m.

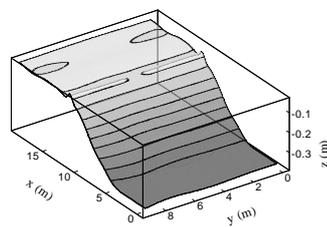


(b) Secção longitudinal $y = 4.6$ m.

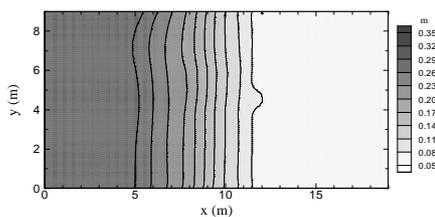


(c) Secção longitudinal $y = 7.6$ m.

Figura 17. Onda B: celeridade de fase de Airy para $T = 1.5$ s (—) e celeridade de fase estimada (---).

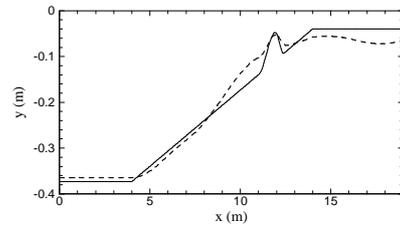


(a) Visualização 3D.

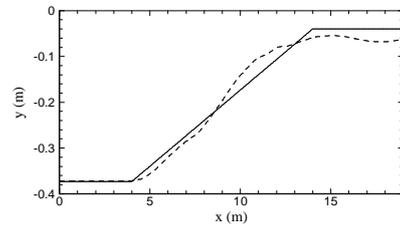


(b) Linhas de contorno.

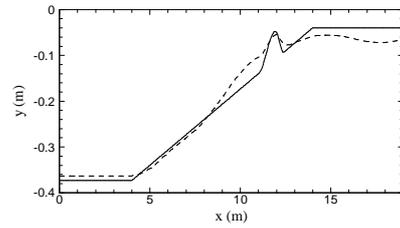
Figure 18. Onda B: geometria estimada do quebramar rasgado por um canal.



(a) Secção longitudinal $y = 1.1$ m.



(b) Secção longitudinal $y = 4.6$ m.



(c) Secção longitudinal $y = 7.6$ m.

Figura 19. Onda B: profundidade real (—) e profundidade estimada (---).

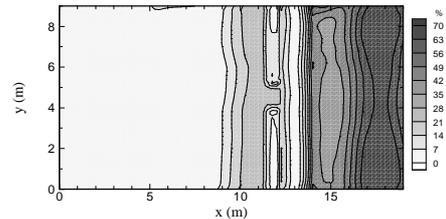


Figura 20. Erro local E_h da batimetria estimada.

Da observação dos resultados da celeridade e da profundidade, e da análise dos erros local e global, conclui-se que a eficiência do modelo de inversão na reconstrução batimétrica diminui substancialmente quando ocorre a rebentação das ondas. Nas zonas do domínio onde existe uma mudança abrupta de profundidade, em consequência do processo de filtragem incluído no modelo de inversão, a profundidade é estimada por excesso.

4. Conclusões

Foi desenvolvido um modelo a 2DH para reconstrução da batimetria por modelação inversa, a partir de um modelo de equações do tipo Boussinesq. O modelo de inversão foi testado para duas configurações batimétricas distintas: a primeira, um baixo elíptico situado sobre um plano inclinado; e a segunda um quebramar rasgado por um canal. De uma forma geral, o modelo obteve bons resultados na reconstrução das duas batimetrias, na ausência de rebentação. Nas zonas onde existe uma abrupta mudança de declive, os valores da profundidade são ligeiramente sobrestimados, sendo uma consequência do processo de filtragem incluído no modelo.

Quando ocorre forte rebentação, o modelo de inversão conduz a resultados com erros localmente elevados. Por isso é necessária a introdução de um modelo de dissipação de energia associada à rebentação no modelo de inversão, para uma correcta reconstrução da batimetria nas áreas onde este fenómeno ocorre.

Agradecimentos

Este trabalho foi financiado pela Fundação para a Ciência e Tecnologia, através do projecto POCTI/ECM/41800/2001, com verbas da União Europeia, Programa FEDER, e verbas da República Portuguesa.

Referências

- Bell, P.S., (1999). *Shallow water bathymetry from an analysis of X-band marine radar images*. Coastal Engineering, Vol. 37, pp. 513-527.
- Berkhoff, J.C.W. (1982). *Verification of numerical wave propagation models for simple harmonic linear water waves*. Coastal Engineering, Vol. 6, pp. 255-279.
- Catalán, P., Haller, M.C. (2005). *Nonlinear phase speeds and depth inversions*. Coastal Dynamics 5th International Conference 2005, [CD-ROM], 14 páginas, Barcelona, Spain.
- Chen, Q., Dalrymple, R.A., Kirby, J.T., Kennedy, A.B., Haller, M.C. (1999). *Boussinesq modelling of a rip current system*. Journal of Geophysical Research, Vol. 104, No. 9, pp. 20637-20637.
- Chen, Q., Kirby, J.T., Dalrymple, R.A., Kennedy, A.B., Chawla, A. (2000). *Boussinesq modeling of wave transformation, breaking and runup. II: 2D*. Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering, Vol. 126, No. 1, pp. 48-56.
- Dugan, J.P., Fetzer, G.J., Bowden, J., Farruggia, G.J., Williams, J.Z., Piotrowski, C.C., Vierra, K., Campion, D., Sitter, D.N. (2001). *Airborne optical system for remote sensing of ocean waves*. Journal of Atmospheric and Oceanic Technology, Vol. 18, No. 7, pp. 1267-1276.
- Dugan, J.P., Piotrowski, C.C., William, J. (2002). *Water depth and surface current retrievals from airborne optical measurements of surface gravity dispersion*. Journal of Geophysical Research, Vol. 106(C8), pp. 16903-16915.
- Dugan, J.P., Suzukawa, H.H., Forsyth C.P., Farber, M.S. (1996). *Ocean wave dispersion surface measured with airborne IR imaging system*. Proceedings of the 1995 International Geoscience and Remote Sensing Symposium, Florence, Italy, pp. 1282-1283.
- Grilli, S.T. (1998). *Depth inversion in shallow water based on nonlinear properties of shoaling periodic waves*. Coastal Engineering, Vol. 35, pp. 185-209.
- Hedges, T. (2001). *An empirical modification to linear wave theory*. Proc. Instn. Civ. Engrs., Vol. 61, pp. 575-579.
- Hessner, K., Reichert K., Dannenberg, J. (2006). *2D surface elevation measurements by means of X-band radar: An application of WaMos II at Duck*. 9th International Workshop on Wave Hindcasting and Forecasting, [CD-ROM], 16 páginas, Victoria, Canada.
- Holland, T.K. (2001). *Application of the linear dispersion relation with respect to depth inversion and remotely sensed imagery*. IEEE Transactions on Geosciences and Remote Sensing, Vol. 39, No. 11, pp. 2060-2071.
- Kennedy, A.B., Chen, Q., Kirby, J.T., Dalrymple, R.A. (2000). *Boussinesq modelling of wave transformation, breaking and runup: I. One dimension*. Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering, Vol. 126, pp. 39-47.
- Kennedy, A. B., Dalrymple, R.A., Kirby, J.T., Chen, Q. (2000). *An approximate model for nonlinear dispersion in monochromatic wave propagation models*. Coastal Engineering, Vol. 9, pp. 545-561.
- Kirby, J.T., Wei, G., Chen, Q., Kennedy, A.B., Dalrymple R.A. (1998). *Funwave 1.0 — Fully nonlinear Boussinesq wave model documentation and user's manual*. Research report CACR-98-06, Center for Applied Coastal Research, University of Delaware.
- Mesquita, A. (2006). *Reconstrução batimétrica por modelação inversa*. Tese de Mestrado. Universidade do Porto.
- Mesquita A., Avilez-Valente, P. (2008). *Reconstrução batimétrica usando modelos de ondas*. Recursos Hídricos (Em revisão).
- Misra, S.K. (2003). *An approach to determining nearshore bathymetry using remotely sensed ocean surface dynamics*. Coastal Engineering, Vol. 47, pp. 265-293.
- Nieto J.C., Rodríguez, G.R., Hessner, K., González, P.I. (2004). *Inversion of marine radar images for surface wave analysis*. Journal of Atmospheric and Ocean Technology, Vol. 21, pp. 1291-1300.
- Peregrine, D.H. (1967). *Long waves on a beach*. Journal of Fluid Mechanics, Vol. 27, pp. 815-827.
- Sain-Venant, A.J.C.B. (1871). *Théorie du mouvement non permanent des eaux, avec application aux crues des rivières et à l'introduction des marées dans leurs lits*. Comptes Rendus des Séances de l'Académie des Sciences, Vol. 73, pp. 147-154 e 237-240.
- Stockdon, H.F., Holman, R.A. (2000). *Estimation of wave phase speed and nearshore bathymetry from video imagery*. Journal of Geophysical Research, Vol. 105, No. 9, pp. 22015-22033.
- Wei, G., Kirby, J.T., Grilli, S.T., Subramanya, R. (1995). *A fully nonlinear Boussinesq model for surface waves. Part I. Highly nonlinear unsteady waves*. Journal of Fluid Mechanics, Vol. 294, pp. 71-92.
- Wu, J., Juang, J.T. (1996). *Application of satellite images to the detection of coastal topography*. Proceedings of the 25th International Conference on Coastal Engineering, Florida, pp. 3762-3769.
- Zienkiewicz, O.C., Morgan, K. (1983). *Finite Elements and Approximations*. John Wiley & Sons, Inc., NY. ISBN 0-471-89089-8.