# ELEMENTOS FINITOS PARA ONDAS NÃO LINEARES E DISPERSIVAS
## Finite elements for nonlinear dispersive waves

PAULO AVILEZ-VALENTE
*Professor Auxiliar, FEUP/CEHRA,*
*Rua Dr. Roberto Frias s/n, P-4200-465 Porto, pvalente@fe.up.pt*

### Resumo

Uma formulação de Petrov-Galerkin do método dos elementos finitos é aplicada para a resolução das equações de Boussinesq a duas dimensões horizontais. O esquema utilizado neste trabalho recorre à discretização bilinear no espaço e linear no tempo com condições de continuidade $C^0$. O esquema de integração no tempo é do tipo predictor-corrector, a um nível. São garantidas precisão e estabilidade condicional de 3.ª ordem. As funções de peso, bilineares no espaço e quadráticas no tempo, permitem a introdução de termos de correcção da dispersão numérica e de um mecanismo dissipativo altamente selectivo, mantendo a consistência da formulação e garantindo as suas propriedades conservativas. São apresentados resultados numéricos para a oscilação em massa de uma bacia quadrangular, e para a propagação de uma onda periódica sobre um quebramar submerso. Conclui-se que o método proposto é estável e preciso, com características óptimas de conservação de massa e de convergência.

**Palavras-chave:** Petrov-Galekin; Estabilidade Numérica; Precisão; Convergência; Conservação de Massa.

### Abstract

A Petrov-Galerkin formulation for the finite element method is applied to the 2DH Boussinesq equations. The discretisation is bilinear in space and linear in time, with $C^0$ continuity. Time integration is performed by a one-level predictor-corrector scheme. Third order accuracy and conditional stability are guaranteed. The weighting functions, bilinear in space and quadratic in time, allow for the introduction of dispersion correction terms and of a highly selective dissipative mechanism, keeping the scheme consistency and conservation properties. Numerical results are presented for the oscillation of a closed basin, and for the propagation of a periodic wave over a bar. The proposed method is accurate and stable, with optimal mass conservation and convergence properties.

**Keywords:** Petrov-Galerkin; Numerical Stability; Accuracy; Convergence; Mass Conservation.

## 1. Introdução

Os primeiros modelos de ondas não lineares e dispersivas devem-se a Boussinesq, 1872, Serre, 1953, e Peregrine, 1967. Na última década verificou-se um importante esforço de investigação na extensão destes modelos, de forma a terem em conta a não linearidade completa (*e.g.* Gobbi *et al.*, 2000, Madsen *et al.*, 2002), a propagação em águas profundas (Nwogu, 1993, Wei e Kirby, 1995, Madsen e Schäffer, 1998, e Gobbi e Kirby, 1999), e a dissipação por rebentação (Zelt, 1991, Schäffer *et al.*, 1993, Antunes do Carmo e Seabra-Santos, 1996, Kennedy *et al.*, 2000, Chen *et al.*, 2000, e Veeramony e Svendsen, 2000).

A resolução numérica destes modelos recorre tradicionalmente ao método das diferenças finitas (*e.g.* Abbott *et al.*, 1978, 1984, Antunes do Carmo *et al.*, 1993a, Wei e Kirby, 1995, Shi *et al.*, 2001, Fuhram e Bingham, 2004). Estes esquemas recorrem a filtros numéricos para garantir a sua estabilidade e ao método de Runge-Kutta de elevada ordem para assegurar a precisão.

Mais recentemente, foram propostos alguns métodos de volumes finitos de 2.ª ordem (Bradford e Sanders, 2002, Stansby, 2003, e Erduran *et al.*, 2005). Cienfuegos *et al.*, 2006, propuseram um esquema de volumes finitos de 4.ª ordem para as equações de Serre estendidas.

Os primeiros trabalhos publicados com aplicações do método dos elementos finitos à discretização das equações de Boussinesq clássicas (*e.g.* Antunes do Carmo *et al.*, 1993b, Kawahara e Cheng, 1994) são formulações de Galerkin de 1.ª ou 2.ª ordem. Mais recentemente foram publicadas aplicações a modelos de Boussinesq estendidos (Antunes do Carmo e Seabra-Santos, 1996, Li *et al.*, 1999, Walkley e Berzins, 1999, Sørensen *et al.*, 2004).

Na maior parte dos casos não foi apresentada nenhuma análise de estabilidade e/ou precisão, sendo que a precisão máxima deverá ser de 2.ª ordem. Por outro lado, as formulações de Galerkin são conhecidas por produzirem soluções com elevada dispersão numérica (Avilez-Valente e Seabra-Santos, 1997). Além disso, em modelos não lineares sem dissipação, a acumulação de energia nas escalas mais pequenas que a malha de cálculo consegue resolver, e o eventual efeito de transferência de energia por efeito de *aliasing* podem causar ruído numérico e tornar o esquema instável (Haltiner e Williams, 1983).

Os algoritmos numéricos para equações deste tipo devem ser estáveis e ter uma precisão de 3.ª ordem (Abbott *et al.*, 1978).

A aplicação de filtros numéricos é uma das técnicas utilizadas para garantir a estabilidade dos esquemas numéricos (Durran, 1999). No entanto a sua aplicação com esquemas de elementos finitos a 2DH é bastante complexa, conduzindo geralmente a soluções demasiado dissipativas (Fernandes e Fortes, 2005).

Neste trabalho recorre-se a uma formulação de Petrov-Galerkin com elementos finitos espaço-temporais. É uma extensão a duas dimensões horizontais de trabalhos anteriores (Avilez-Valente, 2000, Avilez-Valente e Seabra-Santos, 2004, Plecha e Avilez-Valente, 2005).

A função peso é definida de forma a garantir uma precisão de quarta ordem na celeridade de fase linear e um mecanismo dissipativo de terceira ordem. Devido à presença do termo não linear, recorre-se a um esquema predictor-corrector para a integração no tempo, sendo os coeficientes da função peso definidos para cada um dos passos deste esquema.

Na Secção 2, é descrito o modelo de Boussinesq, e a formulação de Petrov-Galerkin. Na Secção 3, descrevem-se e comentam-se duas experiências numéricas destinadas a analisar a precisão e a convergência do esquema proposto.

No primeiro caso é simulada a oscilação em massa de uma bacia portuária e são estudadas as propriedades de conservação e de convergência do método. No segundo caso, é simulada a propagação de uma onda periódica sobre um quebramar submerso, sendo os resultados numéricos obtidos comparados com resultados experimentais disponíveis na literatura (Dingemans, 1994). Na Secção 4 são apresentadas as conclusões.

## 2. Modelo Matemático

### 2.1. Modelo de Boussinesq

Na forma vectorial e a duas dimensões horizontais, o modelo de Boussinesq para fundos muito suaves escreve-se:

$$L\left(\mathbf{U}\right)=\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t}+\mathbf{A}_x\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x}+\mathbf{A}_y\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial y}+\mathbf{B}_{xx}\frac{\partial^3 \mathbf{U}}{\partial x^2\partial t}+\mathbf{B}_{xy}\frac{\partial^3 \mathbf{U}}{\partial x\partial y\partial t}+\mathbf{B}_{yy}\frac{\partial^3 \mathbf{U}}{\partial y^2\partial t}+\mathbf{C}\mathbf{U}=\mathbf{0}\,, \qquad [1]$$

definido no domínio espaço-temporal $Q=\Omega\times T$, com $\Omega\subset\mathbb{R}^2$ e $T=[0,+\infty[$. O vector $\mathbf{U}$ e as matrizes $\mathbf{A}_x$, $\mathbf{A}_y$, $\mathbf{B}_{xx}$, $\mathbf{B}_{xy}$, $\mathbf{B}_{yy}$, e $\mathbf{C}$ são dados por

$$\mathbf{U}=\begin{bmatrix}\zeta\\ \overline{u}\\ \overline{v}\end{bmatrix},\quad \mathbf{A}_x=\begin{bmatrix}\overline{u} & h+\zeta & 0\\ g & \overline{u} & 0\\ 0 & 0 & \overline{u}\end{bmatrix},\quad \mathbf{A}_y=\begin{bmatrix}\overline{v} & 0 & h+\zeta\\ g & \overline{v} & 0\\ 0 & 0 & \overline{v}\end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}_{xx}=\frac{h^2}{3}\begin{bmatrix}0&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{bmatrix},\quad \mathbf{B}_{xy}=\frac{h^2}{3}\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&-1\\0&-1&0\end{bmatrix}, \qquad [2]$$

$$\mathbf{B}_{yy}=\frac{h^2}{3}\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{bmatrix},\quad \mathbf{C}=\begin{bmatrix}0 & dh/dx & dh/dy\\ 0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},$$

em que $\zeta$ é a elevação da superfície livre, $\overline{u}$ e $\overline{v}$ são as componentes da média vertical instantânea da velocidade horizontal, $h$ é a profundidade e $g$ é a aceleração da gravidade. O quadrado da celeridade de fase do modelo de Boussinesq, $C_{\text{Bou}}$, é um aproximante de Padé de ordem $[0/2]$ do quadrado da celeridade de fase do modelo de Airy:

$$C_{\text{Bou}}^2=\frac{gh}{1+\frac{(kh)^2}{3}}\,, \qquad [3]$$

sendo $k$ o número de onda. Este modelo é válido apenas para $kh<\pi/2$, não simulando correctamente a propagação de ondas em águas de profundidade relativa elevada.

### 2.2. Formulação de Elementos Finitos

A formulação de Petrov-Galerkin para o modelo dado pela Eq. [1] consiste em encontrar a função vectorial $\hat{\mathbf{U}}=\left(\hat{\zeta},\hat{u},\hat{v}\right)$ definida em $\Omega\times\left]t^{(n)},t^{(n+1)}\right[$, tal que:

$$\int_{t^{(n)}}^{t^{(n+1)}}\int_\Omega \hat{\mathbf{W}}\cdot L\left(\hat{\mathbf{U}}\right)dx=0\,,\quad \forall\hat{\mathbf{W}}. \qquad [4]$$

Escolheram-se elementos finitos bilineares no espaço e lineares no tempo com as funções de forma (no caso de um elemento regular) dadas por:

$$\begin{aligned}
&N_1=\left(1-\frac{\overline{x}}{\Delta x}\right)\left(1-\frac{\overline{y}}{\Delta y}\right)\left(1-\frac{\overline{t}}{\Delta t}\right), N_2=\frac{\overline{x}}{\Delta x}\left(1-\frac{\overline{y}}{\Delta y}\right)\left(1-\frac{\overline{t}}{\Delta t}\right),\\
&N_3=\frac{\overline{x}}{\Delta x}\frac{\overline{y}}{\Delta y}\left(1-\frac{\overline{t}}{\Delta t}\right),\quad N_4=\left(1-\frac{\overline{x}}{\Delta x}\right)\frac{\overline{y}}{\Delta y}\left(1-\frac{\overline{t}}{\Delta t}\right),\\
&N_5=\left(1-\frac{\overline{x}}{\Delta x}\right)\left(1-\frac{\overline{y}}{\Delta y}\right)\frac{\overline{t}}{\Delta t},\quad N_6=\frac{\overline{x}}{\Delta x}\left(1-\frac{\overline{y}}{\Delta y}\right)\frac{\overline{t}}{\Delta t},\\
&N_7=\frac{\overline{x}}{\Delta x}\frac{\overline{y}}{\Delta y}\frac{\overline{t}}{\Delta t},\quad N_8=\left(1-\frac{\overline{x}}{\Delta x}\right)\frac{\overline{y}}{\Delta y}\frac{\overline{t}}{\Delta t}.
\end{aligned} \qquad [5]$$

Na Eq. [5], $\overline{x}$, $\overline{y}$ e $\overline{t}$ são as coordenadas locais sobre o elemento, e $\Delta x$, $\Delta y$ e $\Delta t=t^{(n+1)}-t^{(n)}$ as suas dimensões. As funções de peso são funções vectoriais, bilineares no espaço e quadráticas no tempo, inicialmente propostas por Yu e Heinrich, 1987, para modelos de convecção-difusão, definidas em cada elemento por

$$\begin{aligned}
\mathbf{W}_i=\mathbf{P}_i&+\alpha_x\frac{\Delta x}{2C_0}\mathbf{T}_\alpha\left(\mathbf{A}_x^\ell\right)^T\frac{\partial \mathbf{P}_i}{\partial x}+\alpha_y\frac{\Delta y}{2C_0}\mathbf{T}_\alpha\left(\mathbf{A}_y^\ell\right)^T\frac{\partial \mathbf{P}_i}{\partial y}\\
&+\beta_x\frac{\Delta x\Delta t}{4C_0}\mathbf{T}_\beta\left(\mathbf{A}_x^\ell\right)^T\frac{\partial^2 \mathbf{P}_i}{\partial x\partial t}+\beta_y\frac{\Delta y\Delta t}{4C_0}\mathbf{T}_\beta\left(\mathbf{A}_y^\ell\right)^T\frac{\partial^2 \mathbf{P}_i}{\partial y\partial t}\\
&+\frac{\Delta x\Delta y\Delta t}{8h^2/3}\mathbf{T}_\gamma\mathbf{B}_{xy}^T\frac{\partial^3 \mathbf{P}_i}{\partial x\partial y\partial t}.
\end{aligned} \qquad [6]$$

Na Eq. [6], $C_0=\sqrt{gh}$ é a celeridade para uma onda longa não dispersiva, as matrizes $\mathbf{A}_x^\ell$ e $\mathbf{A}_y^\ell$ são

$$\mathbf{A}_x^\ell=\begin{bmatrix}0&h&0\\g&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\quad\text{e}\quad \mathbf{A}_y^\ell=\begin{bmatrix}0&0&h\\0&0&0\\g&0&0\end{bmatrix}, \qquad [7]$$

e os tensores $\mathbf{T}_\alpha$, $\mathbf{T}_\beta$ e $\mathbf{T}_\gamma$ são

$$\mathbf{T}_\alpha=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},\quad \mathbf{T}_\beta=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\quad\text{e}\quad \mathbf{T}_\gamma=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&\gamma_{22}&0\\0&0&\gamma_{33}\end{bmatrix}. \qquad [8]$$

As funções escalares $P_i$ são calculadas apenas para os nós para os quais $\bar{t} = \Delta t$:

$$P_5 = 6\left(1-\frac{\bar{x}}{\Delta x}\right)\left(1-\frac{\bar{y}}{\Delta y}\right)\frac{\bar{t}}{\Delta t}\left(1-\frac{\bar{t}}{\Delta t}\right),$$
$$P_6 = 6\frac{\bar{x}}{\Delta x}\left(1-\frac{\bar{y}}{\Delta y}\right)\frac{\bar{t}}{\Delta t}\left(1-\frac{\bar{t}}{\Delta t}\right),$$
$$P_7 = 6\frac{\bar{x}}{\Delta x}\frac{\bar{y}}{\Delta y}\frac{\bar{t}}{\Delta t}\left(1-\frac{\bar{t}}{\Delta t}\right),$$
$$P_8 = 6\left(1-\frac{\bar{x}}{\Delta x}\right)\frac{\bar{y}}{\Delta y}\frac{\bar{t}}{\Delta t}\left(1-\frac{\bar{t}}{\Delta t}\right). \quad [9]$$

Os coeficientes $\beta_x$ e $\beta_y$ são seleccionados de forma a eliminar os erros de dispersão de 2.ª ordem, assegurando a precisão do esquema. Os coeficientes $\alpha_x$ e $\alpha_y$ introduzem termos dissipativos de 3.ª ordem nas equações de conservação da quantidade de movimento, garantindo a estabilidade do método. Os coeficientes $\gamma_{22}$ e $\gamma_{33}$ actuam sobre as derivadas cruzadas para que contribuam para a estabilidade do método. Finalmente a formulação de Petrov-Galerkin pode ser escrita como um sistema de três equações escalares, após integração por partes dos termos dispersivos (para detalhes ver Avilez-Valente e Seabra-Santos, 2000, e Avilez-Valente, 2000).

### 2.3. Esquema de Integração no Tempo

Os termos não lineares na Eq. [1] forçam à utilização de um esquema iterativo do tipo predictor-corrector, com pelo menos dois passos correctores. Os coeficientes $\alpha_x$, $\alpha_y$, $\beta_x$, $\beta_y$, $\gamma_{22}$ e $\gamma_{33}$ são escolhidos em cada passo de forma a garantir a precisão desejada (para detalhes ver Plecha, 2006):

$$\beta_x^{(0)} = 0, \quad \beta_x^{(1)} = \beta_x^{(2)} = \beta_x^{(3)} = \frac{Cr_x}{3}, \quad [10]$$

$$\beta_y^{(0)} = 0, \quad \beta_y^{(1)} = \beta_y^{(2)} = \beta_y^{(3)} = \frac{Cr_y}{3}, \quad [11]$$

$$\alpha_x^{(0)} = Cr_x, \quad \alpha_x^{(1)} = 0, \quad \alpha_x^{(2)} = \alpha_x^{(3)} = \frac{Cr_x^{\,3}}{1-Cr_x^{\,2}}, \quad [12]$$

$$\alpha_y^{(0)} = Cr_y, \quad \alpha_y^{(1)} = 0, \quad \alpha_y^{(2)} = \alpha_y^{(3)} = \frac{Cr_y^{\,3}}{1-Cr_y^{\,2}}, \quad [13]$$

$$\gamma_{22}^{(k)} = -\frac{4}{3}Cr_x\alpha_y^{(k)} \quad \text{e} \quad \gamma_{33}^{(k)} = -\frac{4}{3}Cr_y\alpha_x^{(k)}, \quad k = 0,1,2,3. \quad [14]$$

Nas Eqs. [10] a [14], o índice $k = 0$ corresponde ao passo predictor, e $k = 1,2,3$ corresponde aos passos correctores. $Cr_x$ e $Cr_y$ são os números de Courant direccionais, respectivamente:

$$Cr_x = C_0\frac{\Delta t}{\Delta x} \quad \text{e} \quad Cr_y = C_0\frac{\Delta t}{\Delta y}. \quad [15]$$

De forma a garantir a precisão e estabilidade do método, $\alpha_x \le 1$ e $\alpha_y \le 1$, de onde resultam as condições:

$$Cr_x \le 0.754 \quad \text{e} \quad Cr_y \le 0.754. \quad [16]$$

## 3. Ensaios Numéricos

O algoritmo foi testado com dois ensaios computacionais. No primeiro ensaio, bidimensional, simula-se a oscilação em massa de uma bacia quadrada fechada.

Este teste permite verificar as propriedades de conservação da massa do esquema numérico e realizar uma análise de convergência do algoritmo. A influência da não linearidade da onda na convergência é estudada recorrendo a duas ondas: uma onda quase linear, e uma onda de não linearidade elevada.

### 3.1. Oscilação em massa

A oscilação de uma bacia quadrada fechada permite analisar a convergência do esquema numérico, as suas propriedades conservativas, e a qualidade do tratamento das derivadas cruzadas.

As dimensões da bacia são $L_x \times L_y$, com $L_x = L_y = L = 7.5$ m, e a profundidade é $h = 0.45$ m, constante. As fronteiras são paredes totalmente reflectoras. A condição inicial é uma perturbação da superfície livre com velocidade nula. A perturbação é do tipo gaussiano, cujo centro coincide com o centro da bacia e com a origem do sistema de coordenadas:

$$\zeta(x,y) = H_0 \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\left(x^2+y^2\right)\right], \quad [17]$$

em que $H_0$ é a amplitude da perturbação, e $\sigma = 0.5$ m é o coeficiente de forma. Foram consideradas duas ondas: Onda A — fracamente não linear, com $H_0 = 0.045$ m; Onda B — com não linearidade elevada, $H_0 = 0.225$ m. Os modos próprios lineares de oscilação da bacia correspondem aos números de onda

$$k_{nm}^2 = \left(\frac{\pi}{L}\right)^2\left(n^2+m^2\right). \quad [18]$$

As frequências naturais correspondentes são dadas pela relação de dispersão linear do modelo de Boussinesq:

$$\omega_{nm}^2 = gk_{nm}\frac{k_{nm}h}{1+\frac{\left(k_{nm}h\right)^2}{3}}. \quad [19]$$

#### *3.1.1. Conservação da massa*

O período de ressonância mais baixo, correspondente ao modo de oscilação simétrico $(2,2)$, é $T_{2,2} = 2.64$ s. Num primeiro teste, recorreu-se a uma discretização com elementos bilineares regulares, com $\Delta x = \Delta y = 0.15$ m, e $\Delta t = 0.05$ s. Desta forma, os números de Courant direccionais são $Cr_x = Cr_y = 0.70$. Na Figura 1 é registada a evolução da superfície livre nos primeiros $5$ s de oscilação. Ao fim de $100$ s de oscilação, o erro relativo na variação da massa foi inferior a $10^{-10}$, muitíssimo inferior ao registado com o código FUNWAVE para o mesmo problema: $10^{-2}$, de acordo com Wei e Kirby, 1995. Este resultado pode ser devido a uma melhor integração das condições fronteira no método dos elementos finitos, quando comparado com o método das diferenças finitas, ou à utilização de filtros demasiado dissipativos no FUNWAVE.

#### *3.1.2. Convergência*

Analisou-se a convergência do esquema em função da discretização espacial e da discretização temporal.

A discretização espacial foi estudada numa sequência $\Delta x/i = \Delta y/i$, com $\Delta x = 0.30$ m e $i = 1,\ldots,8$. A discretização temporal foi mantida constante com $\Delta t = 0.0125$ s.

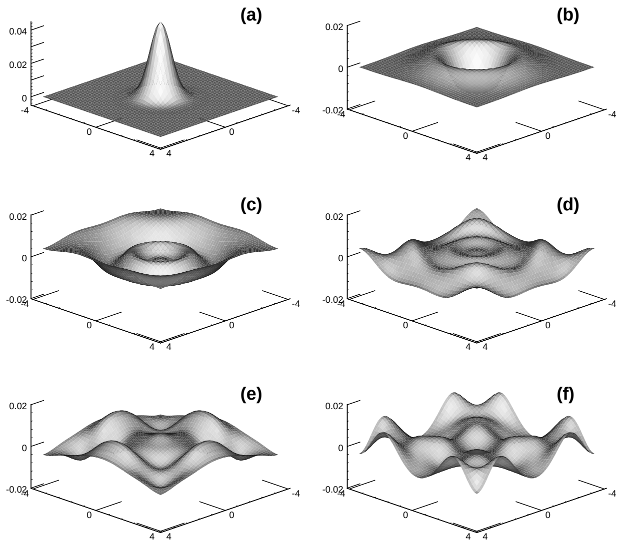



Figura 1. Oscilação em massa para a Onda A. (a) $t = 0$ s. (b) $t = 1$ s. (c) $t = 2$ s. (d) $t = 3$ s. (e) $t = 4$ s. (f) $t = 5$ s.

O resíduo médio euclidiano das superfícies livres calculadas para $t = 5$ s, entre duas simulações com $i-1$ e $i$ é calculado para os mesmos nós computacionais:

$$\mathrm{RME}_i = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{N_1}\left[\left(\zeta_k\right)_i - \left(\zeta_k\right)_{i-1}\right]^2}{N_1}}, \qquad [20]$$

sendo $N_1$ o número de nós da malha com $i = 1$ .

Da análise da Figura 2, pode-se concluir que o logaritmo de RME decresce de uma forma linear com o refinamento da malha, o que indica uma razão de convergência praticamente constante. A razão de convergência de Cauchy, dada por :

$$R_i = \frac{\log\left(\mathrm{RME}_{i-1}/\mathrm{RME}_i\right)}{\log\left(\Delta x_{i-1}/\Delta x_i\right)}, \qquad [21]$$

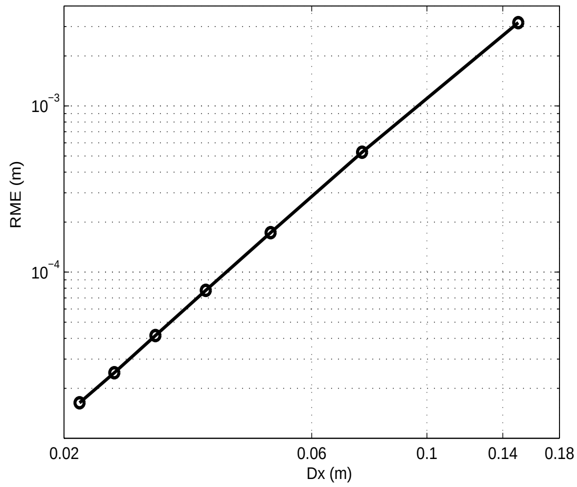
tem um valor médio $\overline{R} = 2.7$ , tanto para a Onda A como para a Onda B.

A análise de convergência para a discretização temporal foi realizada com uma sequência $\Delta t/i$ , com $\Delta t = 0.05$ s e $i = 1,\ldots,8$. A malha espacial manteve uma discretização constante com $\Delta x = \Delta y = 0.15$ m.

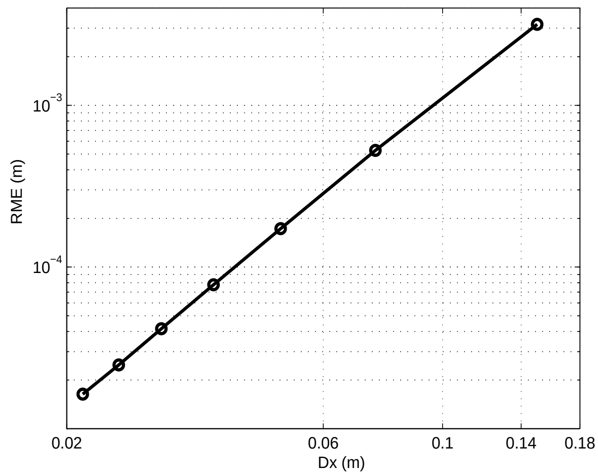
A variação da convergência com a discretização temporal está registada na Figura 3, para o instante $t = 5$ s. Foram obtidos os valores de $\overline{R} = 2.8$ e $\overline{R} = 2.9$, respectivamente para as Ondas A e B. Estes valores são superiores aos obtidos com o código FUNWAVE com coordenadas curvilíneas (Shi *et al.*, 2001).

### 3.2. Propagação de Uma Onda Sobre um Quebramar Submerso

Simulou-se a propagação de uma onda periódica unidimensional sobre um quebramar submerso. Os resultados são comparados com dados laboratoriais (Dingemans, 1994).




(a) $H_0 = 0.225$ m.




(b) $H_0 = 0.045$ m.

Figura 2. Convergência com o refinamento da malha.

A profundidade é de $0.86$ m longe do quebramar, e de $0.20$ m sobre o coroamento do quebramar. O canal numérico tem $43$ m de comprimento. A amplitude da onda é $a = 0.02$ m, e o seu período é $T = 2.857$ s. Foi utilizada uma discretização espacial uniforme, com $\Delta x = 0.1$ m e um passo de tempo $\Delta t = 1/30$ s.

Portanto $Cr = 0.97$ e $kh = 0.70$ na entrada do canal e $Cr = 0.47$ sobre o coroamento. Durante o cálculo foram usados um passo predictor e dois passos correctores. Foram registados resultados em $11$ sondas (cf. Quadro 1 e Figura 4).

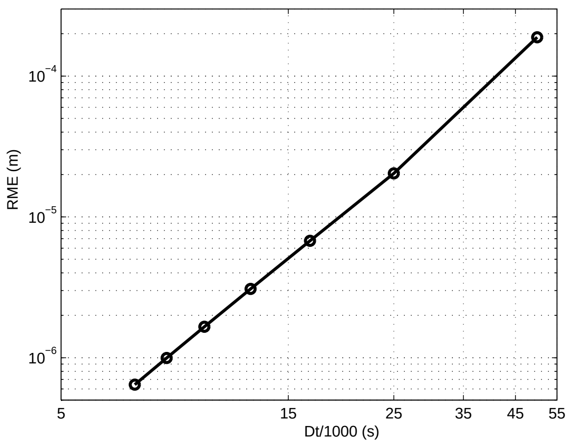
As condições fronteira foram: a barlamar,

$$\hat{\zeta}(0,t) = \zeta_1^*(0,t) \quad \text{e} \quad \hat{u}(0,t) = C_{\mathrm{Bou}}\frac{\zeta_1^*(0,t)}{h + \zeta_1^*(0,t)}, \qquad [22]$$

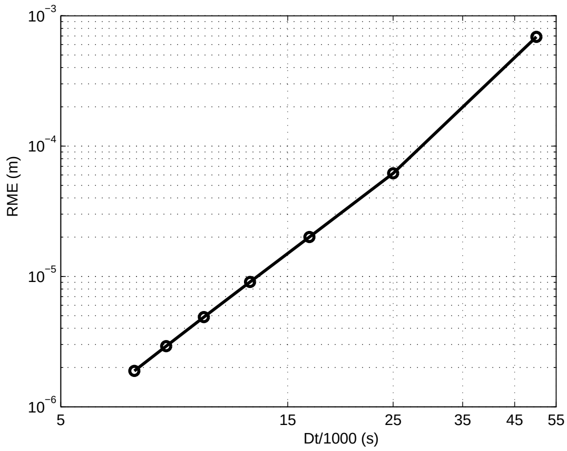
em que $\zeta_1^*(0,t)$ é o sinal experimental da sonda 1; na fronteira de sotamar, foi imposta a condição de radiação

$$\hat{u}(43,t) = C_{\mathrm{Bou}}\frac{\hat{\zeta}(43,t)}{h + \hat{\zeta}(43,t)}. \qquad [23]$$

Nas Eqs. [22] e [23], $C_{Bou}$ é a celeridade de uma onda sinusoidal com período $T = 2.857$ s.




(a) $H_0 = 0.225$ m.




(b) $H_0 = 0.045$ m.

Figura 3. Convergência com o refinamento da discretização temporal.

Quadro 1. Posição das sondas.

| Sonda | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ (m) | 0 | 4 | 6.4 | 17 | 21 | 23 | 25 | 27.4 | 30.6 | 34 | 38 |

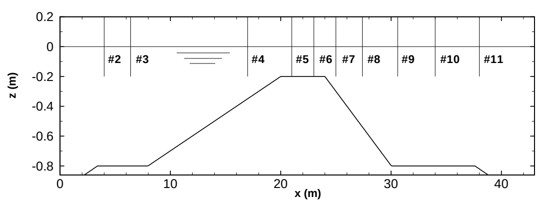



Figura 4. Geometria do quebramar submerso e posição das sondas.

Durante a propagação a barlamar do quebramar a onda é essencialmente composta por uma única harmónica. Sobre o talude de barlamar são geradas harmónicas de ordem superior devido ao aumento da não linearidade. Sobre o coroamento, existe um equilíbrio dinâmico entre os efeitos dispersivos e não lineares, pelo que a ondulação se propaga como se de uma onda solitária se tratasse. Sobre o talude posterior os efeitos dispersivos são dominantes e as várias harmónicas propagam-se com diferentes celeridades.

Na Figura 5 são apresentadas as séries temporais da elevação da superfície livre nas sondas 4–6 e 9–11.

A amplitude e a fase da onda são bem descritas pelo modelo, excepto nas últimas 3 sondas. A análise espectral dos sinais (ver Figura 6) mostra que para as sondas 9–11 a 3.ª harmónica e outras superiores não são reproduzidas pelo modelo. Isto deve-se ao facto de que estas harmónicas têm frequências superiores a 0.93 Hz (limite assimptótico das equações de Boussinesq para $h = 0.86$ m).

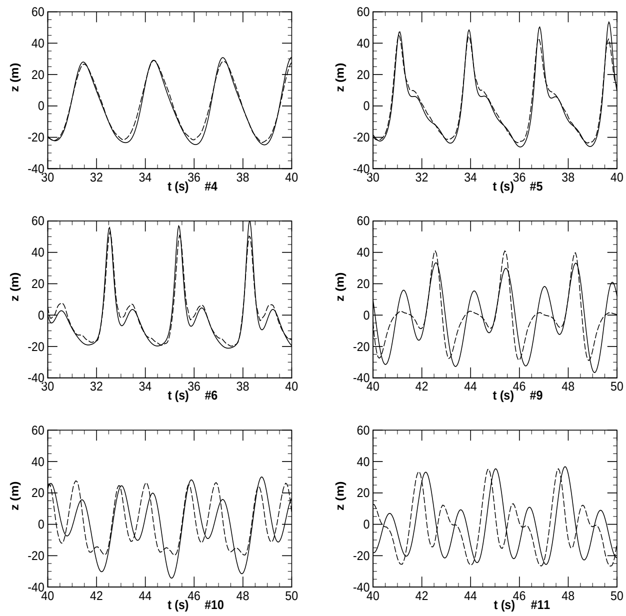



Figura 5. Registos temporais nas sondas. Dados experimentais (- -) e resultados numéricos (—).

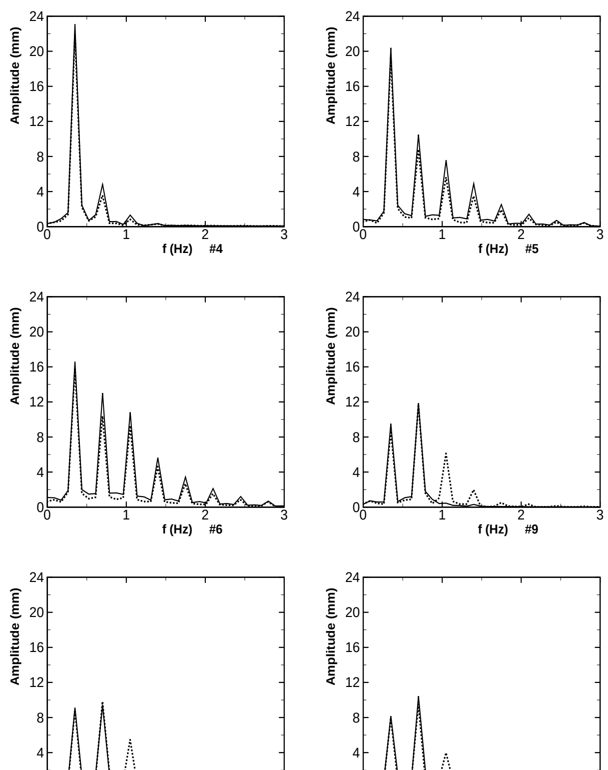



Figura 6. Amplitudes espectrais. Dados experimentais ($\cdots$) e resultados numéricos (—).

## 4. Conclusões

Apresentou-se um esquema de elementos finitos com uma formulação de Petrov-Galerkin para as equações de propagação de ondas Boussinesq clássicas. Recorreu-se a uma discretização completa no espaço e no tempo, com continuidade $C^0$. O esquema introduz termos do tipo *upwind*, os quais corrigem os erros de dispersão numérica e garantem a estabilidade do cálculo. Os testes computacionais realizados mostraram excelentes propriedades de conservação da massa, e uma razão de convergência superior a 2, tanto para a discretização espacial como a discretização temporal. Verificou-se também que o esquema é estável, não sofrendo de perturbações de origem numérica.

## Agradecimentos

Este trabalho foi financiado pela Fundação para a Ciência e Tecnologia, através do projecto POCTI/ECM/41800/2001, com verbas da União Europeia, programa FEDER, e verbas próprias da República Portuguesa.

## Referências

Abbott, M.B., McCowan, A.D., Warren, I.R. (1984). *Accuracy of short-wave numerical models*, J. Hyd. Engrg., 110, 1287–1301.

Abbott, M.B., Petersen, H.M., Skovgaard, O. (1978). *On the numerical modeling of short waves in shallow water*, J. Hyd. Res., 16, 173–203.

Antunes do Carmo, J.S., Seabra-Santos, F.J. (1996). *On breaking waves and wave-current interaction in shallow water: a 2DH finite element model*, Int. J. Numer. Methods Fluids, 22, 429–444.

Antunes do Carmo, J.S., Seabra-Santos, F.J., Almeida, A.B. (1993a). *Numerical solution of the generalized Serre equations with the MacCormack finite-difference scheme*, Int. J. Numer. Methods Fluids, 16, 725–738.

Antunes do Carmo, J.S., Seabra-Santos, F.J., Barthélemy, E. (1993b). *Surface waves propagation in shallow water: a finite element model*, Int. J. Numer. Methods Fluids, 16, 447–459.

Avilez-Valente, P. (2000). *Métodos de Elementos Finitos para a Modelação a Uma e a Duas Dimensões Horizontais da Propagação de Ondas em Engenharia,* Tese de Doutoramento, Universidade de Coimbra.

Avilez-Valente, P., Seabra-Santos, F.J. (1997). *Características dispersivas do método dos elementos finitos aplicado às equações de Boussinesq*, Actas do V Encontro Nacional de Mecânica Computacional, 20–22 Out. 1997, Guimarães, 815–823.

Avilez-Valente, P., Seabra-Santos, F.J. (2000). *A 2DH finite element method for the propagation of water waves around coastal structures*, Coastal Structures'99, Santander, 159–167.

Avilez-Valente, P., Seabra-Santos, F.J. (2004). *A Petrov-Galerkin finite element scheme for the regularized long wave equation*, Computational Mechanics, 34, 256–270.

Boussinesq, J. (1872). *Théorie des ondes et des remous qui se propagent le long d'un canal rectangulaire horizontal, en communiquant au liquide contenu dans ce canal des vitesses sensiblement pareilles de la surface au fond*, J. Math. Pure et Appl., 2, 17, 55–108.

Bradford, S.F., Sanders, B.F. (2002). *Finite-volume models for unidirectional, nonlinear, dispersive waves*, J. Waterway, Port, Coastal and Ocean Engrg., 128, 173–182.

Chen, Q., Kirby, J.T., Dalrymple, R.A., Kennedy, A.B., Chawla, A. (2000). *Boussinesq modeling of wave transformation, breaking, and runup. II: 2D*, J. Waterway, Port, Coastal and Ocean Engrg., 126, 48–56.

Cienfuegos, R., Barthélemy, E., Bonneton, P. (2006). *A fourth-order compact finite volume scheme for fully nonlinear and weakly dispersive Boussinesq-type equations. Part I: Model development and analysis*, Int. J. Numer. Methods Fluids, 51, 1217–1253.

Dingemans, M.W. (1994). *Comparison of computations with Boussinesq-like models and laboratory measurements*, Technical Report Project 1: Waves, MAST-G8M, Delft Hydraulics.

Durran, D.R. (1999). *Numerical Methods for Wave Equations in Geophysical Fluid Dynamics*, Springer-Verlag, N.Y., 482 páginas. ISBN 978-0387983769.

Erduran, K.S., Ilic, S., Kutija, V. (2005). *Hybrid finite-volume finite-difference scheme for the solution of Boussinesq equations*, Int. J. Numer. Methods Fluids, 49, 1213–1232.

Fernandes, J.L., Fortes, C.J.E.M. (2005). *Análise do desempenho de filtros num modelo não-linear de propagação de ondas*, Cong. Métodos Numéricos en Ingeniería, Granada 2005 [CD-ROM]. ISBN 84-95999-74-9.

Furham, D.R., Bingham, H.B. (2004). *Numerical solutions of fully non-linear and highly dispersive Boussinesq equations in two horizontal dimensions*, Int. J. Numer. Methods Fluids, 44, 231–255.

Gobby, M.F., Kirby, J.T. (1999). *Wave evolution over submerged sills: tests of a higher-order Boussinesq model*, Coastal Engineering, 37, 57–96.

Gobby, M.F., Kirby, J.T., Wei, G. (2000). *A fully non-linear Boussinesq model for surface waves. Part 2. Extension to* $O(kh)^4$, J. Fluid Mech., 405, 181–210.

Haltiner, G.J., Williams, R.T. (1983). *Numerical Prediction and Dynamic Meteorology*, J. Wiley & Sons, N.Y., 496 páginas. ISBN 978-0471059714.

Kawahara, M., Cheng, J.Y. (1994). *Finite element method for Boussinesq wave analysis*, Int. J. Comput. Fluid Dynamics, 2, 1–17.

Kennedy, A.B., Chen, Q., Kirby, J.T., Dalrymple, R.A. (2000). *Boussinesq modeling of wave transformation, breaking, and runup. I: 1D*, J. Waterway, Port, Coastal and Ocean Engrg., 126, 39–47.

Li, Y.S., Liu, S.X., Yu, Y.X., Lai, G.Z. (1999). *Numerical modeling of Boussinesq equations by finite element method*, Coastal Engineering, 37, 97–122.

Madsen, P.A., Bingham, H.B., Liu, H. (2002). *A new Boussinesq method for fully non-linear and extremely dispersive water waves*, J. Fluid Mech., 462, 1–30.

Madsen, P.A., Schäffer, H.A. (1998). *Higher-order Boussinesq-type equations for surface gravity waves: derivation and analysis*, Phil. Trans. R. Soc. Lond. A, 356, 3123–3184.

Nwogu, 0. (1993). *An alternative form of the Boussinesq equations for modelling the propagation of waves from deep to shallow water*, J. Waterway, Port, Coastal and Ocean Engrg., 119, 618–638.

Peregrine, D.H. (1967). *Long waves on a beach*, J. Fluid Mech., 27, 815–827.

Plecha, S. (2006). *Esquemas de Elementos Finitos para Ondas Dispersivas*, Tese de Mestrado, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto.

Plecha, S., Avilez-Valente, P. (2005). *Modelação da propagação de ondas não lineares e dispersivas com espectro de banda estreita*, Cong. Métodos Numéricos en Ingeniería, Granada 2005 [CD-ROM]. ISBN 84-95999-74-9.

Schäffer, H.A., Madsen, P.A., Deigaard, R. (1993). *A Boussinesq model for waves breaking in shallow water*, Coastal Engineering, 20, 185–202.

Serre, F. (1953). *Contribution à l'étude des écoulements permanents et variables dans les canaux*, La Huille Blanche, 3, 374–388 e 830–872.

Shi, F., Dalrymple, R.A., Kirby, J.T., Chen, Q., Kennedy, A. (2001). *A fully nonlinear Boussinesq model in generalized curvilinear coordinates*, Coastal Engineering, 42, 337–358.

Sørensen, O.R., Schäffer, H.A., Sørensen, L.S. (2004). *Boussinesq-type modeling using an unstructured finite element technique*, Coastal Engineering, 50, 181–198.

Stansby, P.K. (2003). *Solitary wave run up and overtopping by a semi-implicit finite-volume shallow-water Boussinesq model*, J. Hyd. Res., 41, 639–647.

Veeramony, J., Svendsen, I.A. (2000). *The flow in surf-zone waves*, Coastal Engineering, 39, 93–122.

Walkley, M., Berzins, M. (1999). *A finite element method for the one-dimensional extended Boussinesq equations*, Int. J. Numer. Methods Fluids, 29, 143–157.

Wei, G., Kirby, J.T. (1995). *Time-dependent numerical code for extended Boussinesq equations*, J. Waterway, Port, Coastal and Ocean Engrg., 121, 251–261.

Yu, C.-C., Heinrich, J.C. (1987). *Petrov-Galerkin method for multidimensional, time-dependent, convective-diffusion equations*, Int. J. Numer. Methods Fluids, 24, 2201–2215.

Zelt, J.A. (1991). *The run-up of nonbreaking and breaking solitary waves*, Coastal Engineering, 15, 205–246.