

## SOBRE O INÍCIO DO MOVIMENTO DE PARTÍCULAS SEDIMENTARES On the beginning of motion of sediment particles

R. ALEIXO <sup>(1)</sup> e R.MAIA <sup>(2)</sup>

<sup>(1)</sup>, Secção de Hidráulica Recursos Hídricos e Ambiente,  
Rua do Dr.Roberto Frias s/n 4200-695 Porto, ferreira\_aleixo@yahoo.co.uk

<sup>(2)</sup> Professor Associado, Secção de Hidráulica Recursos Hídricos e Ambiente,  
Rua do Dr.Roberto Frias s/n 4200-695 Porto, rmaia@fe-up.pt

### Resumo

O início do movimento de partículas sedimentares é na sua essência um problema complexo. Existem várias formas de análise, mas são muitas vezes baseadas em parâmetros empíricos e não raras vezes negligenciam os fenómenos físicos presentes aquando do início do movimento. Para focar o aspecto físico do início do movimento considerar-se-á um caso simplificado que permita determinar as interacções fundamentais que conduzem ao início do movimento. É assim apresentado um modelo conceptual sobre o início do movimento de uma partícula esférica singular, doravante designada por partícula-teste, e apoiada num leito de partículas idênticas. Os resultados obtidos são comparados com os resultados do diagrama de Shields, obtidos para leitos de  $n$  partículas.

**Palavras-chave:** movimento incipiente, critério de Shields, turbulência.

### Abstract

The beginning of motion of sediment particles is a complex problem. There are many ways of analyzing it, but they are often based in empirical parameters and frequently tend to neglect the physical phenomena that lead to the sediment motion. In order to focus on the physics of the beginning of sediment motion, a simplified case that may allow the determination of the fundamental interactions leading to the beginning of motion is considered. In order of that a conceptual model on the beginning of sediment motion of a spherical particle is presented. The obtained results are compared to the ones of Shields, obtained for channel beds made of  $n$  particles

**Keywords:** incipient motion, Shields criterion, turbulence.

## 1. Modelo Conceptual

### 1.1 Introdução

Considere-se o modelo de leito representado na Figura 1. Este consiste numa partícula esférica singular - designada de partícula-teste - apoiada em quatro partículas idênticas.

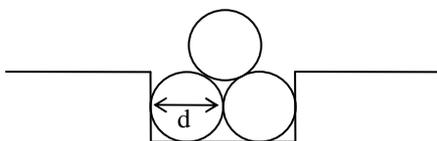


Figura1. Representação esquemática do modelo de leito.

Antes da derivação das expressões pertinentes à condição do início do movimento é necessário efectuar algumas considerações geométricas.

A configuração da partícula-teste e das quatro partículas de suporte consiste num arranjo de 5 partículas. Unindo o centro geométrico de cada uma das partículas é fácil verificar que se obtém uma pirâmide de base quadrada, conforme ilustrado na Figura 2.

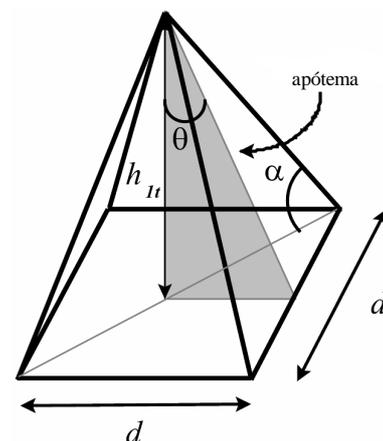


Figura 2. Esquema da pirâmide de base quadrada formada pelos centros geométricos das partículas do leito onde se indica a altura da pirâmide e o ângulo entre o apótema e o eixo vertical.

Pode ser demonstrado que a altura da partícula-teste, acima do topo das partículas de suporte é dada por:

$$h_{1t} = \frac{d}{\sqrt{2}}, \quad [1]$$

em que  $d$  representa o diâmetro da partícula.

Por outro lado, o ângulo  $\theta$ , designado de ângulo de suporte, pode ser calculado pela expressão:

$$\theta = \arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cong 35,26^\circ . \quad [2]$$

Este ângulo é importante para a definição da condição crítica para o início do movimento da partícula-teste.

### 1.2 Análise das forças que actuam na partícula-teste

Para obter um modelo conceptual pertinente à descrição do início do movimento, considerar-se-ão as seguintes hipóteses:

1. O escoamento processa-se sobre uma placa plana lisa, até ser atingida a partícula-teste;
2. O escoamento é bi-dimensional e desenvolvido de tal forma que a componente longitudinal,  $u$ , é muito maior que as componentes vertical,  $v$  e transversal,  $w$ ;
3. A camada limite está confinada a uma pequena região junto à parede de tal forma que o perfil de velocidades que atinge a partícula se pode considerar uniforme e dado por  $u = U_\infty$ .
4. O escoamento é desenvolvido e estacionário.

As forças que actuam na partícula-teste são representadas na Figura 3 e descritas seguidamente.

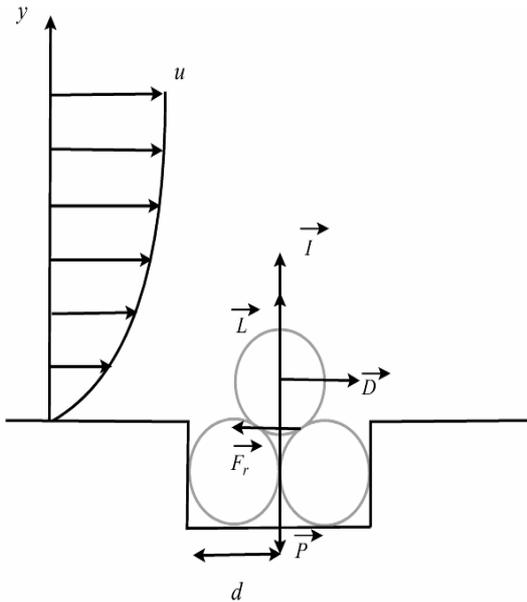


Figura 3. Esquema das forças que actuam na partícula-teste.

O peso imerso

$$|\vec{P} - \vec{I}| = \frac{\pi}{6}(\rho_s - \rho)gd^3 \quad [3]$$

A força de arrastamento,  $\vec{D}$  (Goldstein, 1965)

$$|\vec{D}| = \frac{1}{2}\rho U_\infty^2 S C_D \quad [4]$$

A força de sustentação,  $\vec{L}$  (Goldstein, 1965)

$$|\vec{L}| = \frac{1}{2}\rho U_\infty^2 S C_L \quad [5]$$

A força de atrito,  $\vec{F}_r$  (Halliday *et al.*, 2001)

$$|\vec{F}_r| = -\mu_e |\vec{R}_n| \quad [6]$$

em que  $U_\infty$  representa a velocidade de referência,  $S$  a secção transversal da partícula-teste perpendicular à direcção do escoamento,  $\rho$  a massa volúmica do fluido,  $C_D$  o coeficiente de arrastamento,  $C_L$  o coeficiente de sustentação,  $\vec{R}_n$  a reacção normal e  $\mu_e$  o coeficiente de atrito estático.

A condição para o equilíbrio implica que tanto o somatório das forças,  $F$ , como o dos momentos dessas forças,  $M$ , sejam nulos, ou seja:

$$\begin{cases} \sum \vec{F} = 0 \\ \sum \vec{M} = 0 \end{cases} \quad [7]$$

Da aplicação destas condições resultam duas expressões que podem definir o início do movimento:

$$\frac{U_\infty^2}{(s-1)gd} = \frac{4}{3C_D} \left( \frac{\mu_e}{1 + \frac{C_L}{C_D}\mu_e} \right) \quad [8]$$

e

$$\frac{U_\infty^2}{(s-1)gd} = \frac{4}{3C_D} \left( \frac{\tan\theta}{1 + \frac{C_L}{C_D}\tan\theta} \right) \quad [9]$$

em que  $s = \rho_s/\rho$ .

A condição crítica será a que conduzir a um menor valor do parâmetro  $U_\infty^2/(s-1)gd$ . Para vidro e perspex o valor do coeficiente de atrito estático é  $0.7 < \mu_e < 0.9$  e dado que  $\tan\theta = 0.7$ , considerou-se que seria a equação [9] a condição crítica para o início do movimento. O primeiro membro desta equação não é mais que um número de Froude, o qual pode então ser expresso como:

$$Fr = f(C_D, C_L, \theta) \quad [10]$$

Dado que  $C_D$  é função do número de Reynolds da partícula,  $Re_p$ , e que  $C_L$  é função do gradiente de velocidades, a equação [10] pode ser ainda traduzida por:

$$Fr = f\left(Re_p, \frac{\partial u}{\partial y}, \theta\right) \quad [11]$$

No entanto, de acordo com a hipótese 3 atrás referida, é possível desprezar o efeito da sustentação, resultando para a equação [9]:

$$\frac{U_\infty^2}{(s-1)gd} = \frac{4}{3C_D} \tan\theta \quad [12]$$

Recordando que a velocidade de atrito,  $u_*$ , é dada por:

$$u_*^2 = \frac{\tau_w}{\rho}, \quad [13]$$

em que  $\tau_w$  representa a tensão de arrastamento no fundo do canal e  $\rho$  a massa volúmica do fluido.

Multiplicando ambos os membros da equação [12] por  $u^*$  resulta:

$$\frac{u_*^2}{(s-1)gd} = \frac{4}{3C_D U_\infty^2} \tan \theta, \quad [14]$$

sendo possível demonstrar que (Schlichting, 1966)

$$U_\infty^2 = \left( \frac{U_\infty}{u_*} \right)^2 \approx 400, \quad [15]$$

O primeiro membro da equação [14] será aqui referido por parâmetro de Shields, e designado por  $Sh$  (na literatura é frequente representar este parâmetro por  $\theta$  ou por  $Y$ , (Yalin, 1977)).

Conforme se referiu anteriormente o coeficiente de arrastamento é função do número de Reynolds.

Para uma partícula imersa num escoamento uniforme o referido coeficiente admite a definição correspondente ao gráfico representado na Figura 4.

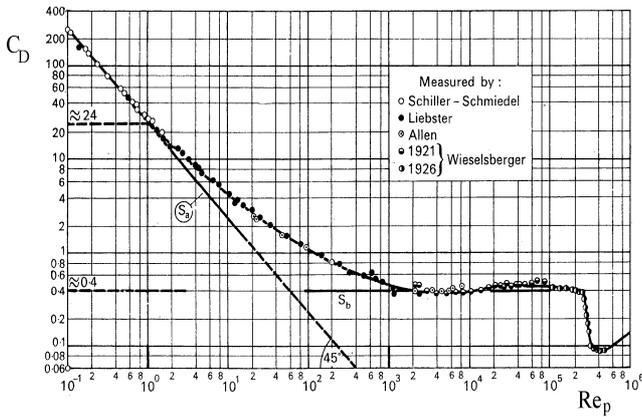


Figura 4. Variação do coeficiente de arrastamento em função do número de Reynolds de partícula.

Esse gráfico pode ser dividido em troços (Cliff *et al.*, 1978) com diferentes definições analíticas, sendo  $W = \log Re_p$ .

$$C_D = \frac{24}{Re_p} \left( 1 + 0,1315 Re_p^{0,82-0,05 \log Re_p} \right), \quad 0,01 \leq Re_p \leq 20 \quad [16]$$

$$C_D = \frac{24}{Re_p} \left( 1 + 0,1935 Re_p^{0,6385} \right), \quad 20 < Re_p \leq 260 \quad [17]$$

$$C_D = \log C_D = 1,6435 - 1,1242W + 0,1558W^2, \quad 260 < Re_p \leq 1,5 \times 10^3 \quad [18]$$

$$C_D = \log C_D = -2,4571 + 2,5556W - 0,9295W^2 + 0,1049W^3, \quad 1,5 \times 10^3 < Re_p \leq 1,2 \times 10^4 \quad [19]$$

Utilizando estas expressões e a relação [14] obtém-se a família de curvas em função do ângulo  $\theta$  (referenciado por  $\theta$ ), que se mostra na Figura 5.

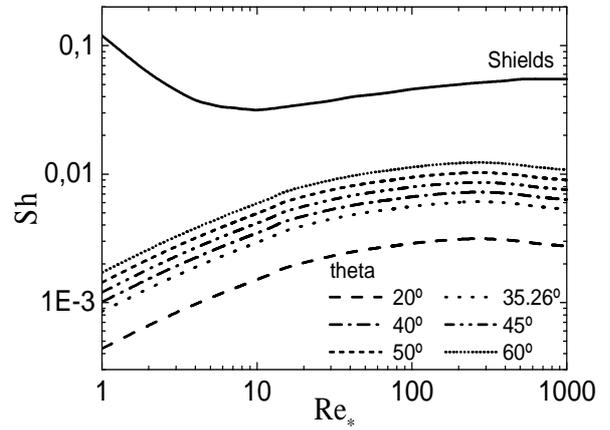


Figura 5. Evolução do parâmetro de Shields,  $Sh$ , em função do número de Reynolds de atrito em função dos diferentes ângulos de suporte (considere-se  $\theta = \theta$ ).

Verifica-se que para o regime turbulento,  $Re^* > 80$ , e considerando que  $\theta = 35,26^\circ$ , obteve-se  $Sh \approx 0,006$  o qual é cerca de 10 vezes menor que o valor usualmente aceite para o diagrama de Shields,  $Sh \approx 0,06$  (Cardoso, 1998).

Fenton e Abbot (1977) determinaram  $Sh \approx 0,01$ , para valores elevados de  $Re^*$ .

Segundo esses autores o valor obtido estava de acordo com os resultados determinados por Coleman (1967).

É possível fazer reflectir na formulação do problema a influência da turbulência. Para tal considere-se que a velocidade pontual é composta por uma componente média  $\bar{u}$ , e por uma flutuação,  $u'$ . Da definição de força de arrastamento resulta:

$$D = \frac{1}{2} \rho (\bar{u} + u')^2 S C_D \quad [20]$$

E desenvolvendo o caso notável obtém-se:

$$D = \frac{1}{2} \rho (\bar{u}^2 + 2\bar{u}u' + u'^2) S C_D \quad [21]$$

Aplicando a média de Reynolds (Hinze, 1975) e tendo em conta que  $\bar{u}' = 0$  e que nas condições formuladas  $\bar{u}^2 = U_\infty^2$ , resulta:

$$D = \frac{1}{2} \rho (U_\infty^2 + \overline{u'^2}) S C_D \quad [22]$$

Verifica-se assim que a força de arrastamento tem a contribuição da componente média ( $U_\infty^2$ ) e da flutuação,  $\overline{u'^2}$ . Um raciocínio idêntico é válido para a força de sustentação e resulta:

$$L = \frac{1}{2} \rho (U_\infty^2 + \overline{u'^2}) S C_L \quad [23]$$

O balanço dos momentos das forças resulta agora na expressão:

$$Sh = \frac{4}{3C_D} \tan \theta \frac{1}{U_\infty^2} \left( \frac{1}{1 + It_u^2} \right) \quad [24]$$

onde  $It_u^2 = \overline{u'^2} / U_\infty^2$ . Verifica-se assim que a intensidade de turbulência contribui para diminuir o valor do parâmetro de Shields, ou seja, para antecipar o início do movimento. Se  $It_u^2 \ll 1$  tem-se:

$$Sh = \frac{4}{3C_D} \tan \theta \frac{1}{U_\infty^2} (1 - It_u^2) \quad [25]$$

A representação gráfica da equação [21] é feita para dois valores de  $It_u$ , nomeadamente 0 e 30%, e é ilustrada na Figura 6, onde pode ser claramente visto o efeito, ainda que pequeno, da flutuação da turbulência.

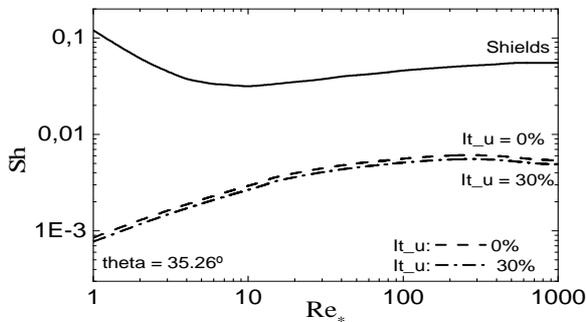


Figura 6. Influência da intensidade de turbulência no valor do parâmetro de Shields considerando um ângulo de suporte  $\theta = 35,26^\circ$  (considere-se  $\theta = \theta$ ).

## 2. Instalação Experimental

As experiências efectuadas no âmbito deste trabalho foram realizadas no canal metálico do Laboratório de Hidráulica, o qual tem 17 m de comprimento, 0,4m de largura e 0,6 m de altura. Neste canal foi colocado um modelo de leito feito em perspex capaz de acomodar o modelo descrito. Utilizaram-se partículas esféricas feitas em vidro ( $\rho_s = 2,65 \times 10^3 \text{ kgm}^{-3}$ ) com 5 mm de diâmetro.

As medições da velocidade foram realizadas com um Anemómetro Laser por efeito Doppler, LDA (LDA: Laser Doppler Anemometer) cujas características se resumem no seguinte quadro (v.c.: volume de controlo):

Quadro 1. Parâmetros do sistema LDA utilizados nas medições.

Parâmetro	VALOR	DESCRIÇÃO
$\lambda$	514,5nm	Comprimento de onda
$\theta$	6.834	Ângulo dos feixes laser
$\delta_z$	2,53mm	Eixo maior do v.c
$\delta_y$	162 $\mu\text{m}$	Eixo menor do v.c.
$D_f$	4,318 $\mu\text{m}$	Distância entre franjas
$f_s$	0.6MHz	Desvio de frequência

A Figura 7 ilustra a grelha de medição utilizada nas medições realizadas.

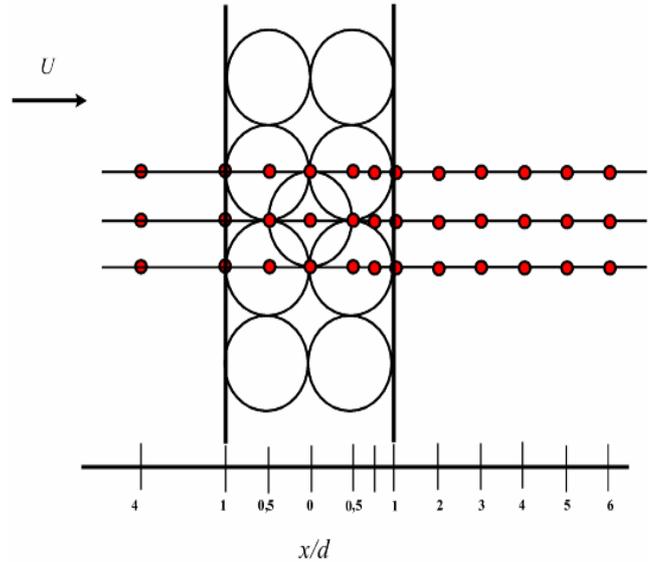


Figura 7. Grelha de medição utilizada (vista em planta)

## 3. Resultados Experimentais

### 3.1 Determinação dos valores críticos

Os valores críticos são, por definição, os valores das diferentes grandezas correspondentes ao início do movimento da partícula-teste. O intervalo de caudais para os quais se verificou o movimento da partícula foi:

$$Q_c = [15,85; 17,25] \text{ (L/s)} \quad [26]$$

tendo sido utilizado o caudal de  $Q_c = 16,16 \text{ (L/s)}$  como valor médio. Para além deste valor foram estudados ainda os escoamentos correspondentes a duas condições inferiores à crítica.

As características destes três escoamentos estão indicadas no quadro 2, em função do número de Reynolds do escoamento,  $Re_h = UR_h / \nu$ , em que  $R_h$  representa o raio hidráulico.

As medições de velocidade realizadas na condição de escoamento crítica foram possibilitadas pela substituição da partícula-teste em vidro por uma de igual diâmetro feita em aço.

Quadro 2. Condições do escoamento estudadas em função do número de Reynolds.

$Re_h$	h (m)	Q (L/s)	$\tau_w \text{ (Nm}^{-2}\text{)}$
$3,1 \times 10^4$	0,055	4,04	0,120
$7,0 \times 10^4$	0,085	10,10	0,224
$1,0 \times 10^5$	0,114	16,16	0,323

Para avaliar o efeito da partícula-teste foram realizadas, para cada condição de escoamento, medições referentes a dois casos: sem partícula-teste e com partícula-teste.

Os valores da tensão de corte foram determinados, a partir dos perfis de velocidade medidos com LDA, através do método de Clauser.

De acordo com Young (1989) é possível demonstrar que:

$$\frac{u}{U_\infty} = \frac{1}{k} \sqrt{\frac{C_f}{2}} \ln\left(\frac{U_\infty y}{\nu}\right) + \sqrt{\frac{C_f}{2}} \left( B + \frac{1}{2k} \ln\left(\frac{C_f}{2}\right) \right) \quad [27]$$

em que  $C_f = 2\tau_w / \rho U_\infty^2$  representa o coeficiente de atrito,  $k=0,4$  a constante de von Kármán e  $B$  uma constante. Escolhendo vários valores do coeficiente de atrito é possível definir uma família de curvas e escolher qual a que melhor se ajusta aos resultados experimentais. O gráfico de Clauser aplicado à condição crítica é ilustrado na figura 8, a partir do qual se determinou  $C_f = 0,0045$ .

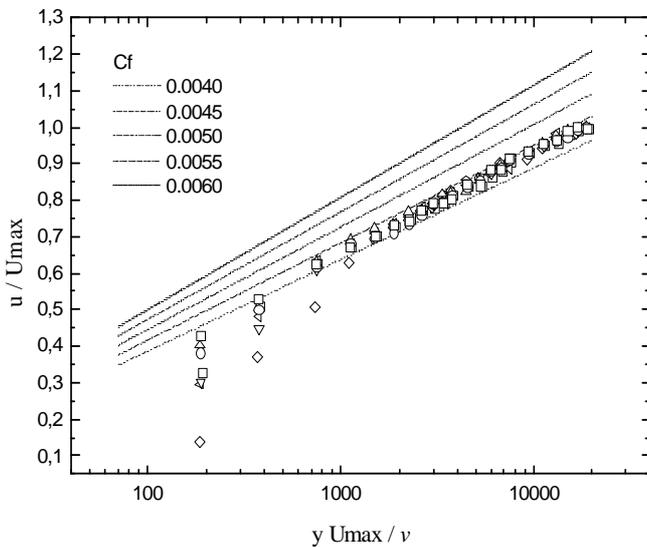


Figura 8. Aplicação do método de Clauser aos resultados experimentais obtidos para  $Re_h = 1,0 \times 10^5$ . O caso crítico corresponde a  $C_f = 0,0045$ .

### 3.2 Análise do modelo conceptual

A partir dos valores da velocidade de atrito determinados foi possível calcular os valores do parâmetro de Shields e do número de Reynolds de atrito para as três condições analisadas:

Quadro 3. Valores do parâmetro de Shields experimentais e previstos pelo modelo para as três condições ensaiadas.

CONDIÇÃO DE ESCOAMENTO	$Re_h$	$Re^*$	Sh	Sh (previsto)
P1	$3,1 \times 10^4$	54	0,0015	0,120
P2	$7,0 \times 10^4$	74	0,0028	0,224
P3	$1,0 \times 10^5$	89	0,0040	0,323

A correspondente representação gráfica dos pontos indicados no quadro 3 é mostrada na figura 9 assim como a curva do modelo conceptual para o valor da intensidade de turbulência medido.

Pode verificar-se que o ponto crítico, referenciado por P3 se situa muito abaixo da curva de Shields - o que seria de esperar, dado que o diagrama de Shields é válido para leitos de  $n$  partículas - mas encontra-se abaixo da curva proposta pelo modelo conceptual.

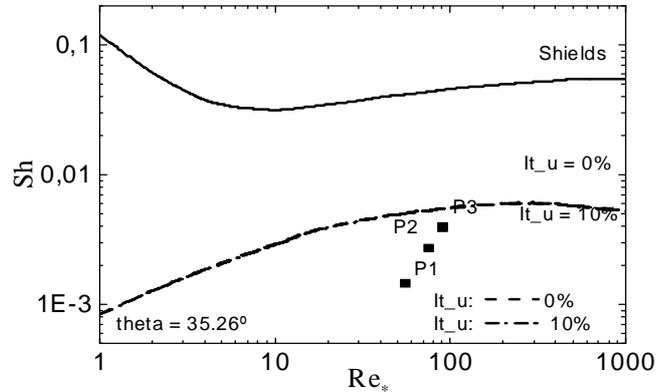


Figura 9. Aplicação do modelo conceptual desenvolvido aos resultados obtidos, considerando nula a força de sustentação. De salientar que o ponto P3, referente ao caso crítico se situa ainda abaixo do valor crítico previsto. A curva de Shields é apresentada para comparação (considere-se  $\theta = \theta$ ).

De salientar que, na derivação do modelo conceptual, se utilizou a hipótese da força de sustentação ser nula. Se, no entanto, se admitir que a sustentação é dada pela expressão de Einstein e Samni (1949):

$$C_L = 0,178 \quad [28]$$

obtem-se para este caso a curva indicada pela equação [23], representada na figura 10, onde é visível a contribuição da sustentação para a redução do valor crítico. A figura 10 mostra assim que é importante considerar também a componente da sustentação na determinação das condições críticas pelo modelo conceptual.

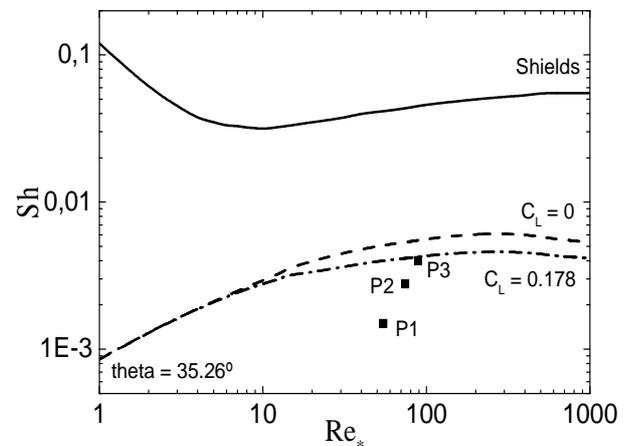


Figura 10. Resultados do modelo conceptual obtidos considerando a sustentação de acordo com os resultados de Einstein e Smani (1949). Neste caso o modelo conceptual coincide, para o caso crítico (P3), com o início do movimento (considere-se  $\theta = \theta$ ).

#### 4. Conclusões

Um modelo conceptual para o início do movimento de uma partícula singular foi obtido em função das forças que sobre ela actuam.

Este modelo depende de vários parâmetros, nomeadamente dos coeficientes de sustentação e de arrastamento, os quais devem ser avaliados para as condições físicas dos escoamentos em questão.

O comportamento de uma partícula singular, imersa num escoamento é significativamente diferente do comportamento de um leito de  $n$  partículas.

Daí as diferenças obtidas entre o modelo conceptual proposto e a curva de Shields.

É possível verificar que o modelo proposto, utilizando as hipóteses enunciadas na sua formulação, permite prever o início do movimento de uma partícula singular.

#### Agradecimentos

Este trabalho foi financiado pela Fundação para a Ciência e Tecnologia, ref. POCTI/ECM/46693/2002.

#### Referências

- Cardoso, A.H. (1998). *Hidráulica Fluvial*, Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa, 314, ISBN: 972-31-0815-1.
- Coleman, NL (1967). A Theoretical and Experimental Study of Drag and Lift Forces Acting on a Sphere Resting on a Hypothetical Stream Bed, Proc. 12th Congress, IAHR.
- Cliff, R, J.R. Grace, and M.E. Weber (1978). *Bubbles, Drops and Particles*, Academic Press, New York.
- Einstein, H. A. & S.A. El Samni. (1949). *odynamic forces on a rough wall*. Review of Modern Physics. 21 (3). 1949.
- Fenton, J. & Abbot, J. (1977). *Initial movement of grains on a stream bed*. Proceedings of the Royal Society 352, 523-537.
- Halliday D, Resnick R e Walker J, (2001). *Fundamentals of Physics*, John Wiley and Sons , New York, 952, ISBN: 0-471-39224-3.
- Hinze, J.O. (1975). *Turbulence*. McGraw-Hill New York.
- Schlichting, H. (1966) *Boundary Layer Theory*, Mc-Graw Hill, New York.
- Yalin, M.S. (1977). *Mechanics of Sediment Transport*, Pergamon Press, Oxford.
- Young, A.D. (1989). *Boundary Layers*, BSP Professional Books, Oxford.